

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON K. BEYER VDI, G. HAMEL VDI, L. PRANDTL VDI UND C. WEBER. HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

:: Band 18 :: Seite 207 bis 262

:: Heft 4 :: August 1938

I N H A L T:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Englisch-französische Titelerläuterungen der in Band XVIII, Heft 4 der „ZAMM" (1938) veröffentlichten Hauptaufsätze.

D. Küchemann in Göttingen.

On the disturbed motion of a gas with boundary layer. Consider in a half-plane the flow of an inviscid compressible liquid, parallel to the wall, having constant velocity outside a boundary layer and linearly decreasing velocity inside it. If we add a small disturbing wave-motion, two cases may arise. 1. For a set of discrete (characteristic) values of the wave-velocity the wave-motion vanishes at infinity. The values found being real, no trace of beginning turbulence has been detected. 2. For a continuous manifold of values there exist outside the boundary layer wave-motions of finite amplitude at infinity which penetrate into the boundary layer and are reflected by it. Figures are drawn for both kinds of motion.

Sur l'écoulement perturbé d'un gaz à couche limite. Soit dans un demi-plan un fluide compressible non-visqueux s'écoulant parallèlement à la paroi avec une vitesse constante à l'extérieur d'une couche limite et linéairement décroissante à son intérieur. La superposition d'une petite perturbation ondulatoire conduit à deux régimes distincts. 1. Pour des valeurs discrètes de la vitesse de propagation des ondes (valeurs propres) le mouvement ondulatoire tend vers zéro à l'infini. Les valeurs calculées par l'auteur étant réelles, il n'a pas trouvé de turbulence naissante. 2. Pour un ensemble continu de valeurs de la vitesse, il existe des mouvements ondulatoires d'amplitude finie à l'infini qui pénètrent dans la couche limite et sont réfléchis par elle. L'auteur illustre les deux cas par des figures.

M. Ray in Lahore.

Sur le mouvement d'un cylindre elliptique infini dans un liquide tourbillonnaire. Il s'agit d'un liquide dont l'écoulement se fait à tourbillon constant et par filets parallèles. Dans ce milieu un cylindre elliptique peut exécuter un mouvement libre composé d'une translation dans la direction du courant et d'une rotation de fréquence déterminée. Cette fréquence est calculée par une intégration numérique. Le mouvement est instable.

R. Hofmann in Aachen (dzt. Sterkrade).

A non-linear problem concerning the equilibrium of thin plates. A plane plate, circular or bounded by two parallel straight lines, resting on rigid foundations, is subjected to a uniform load and a bending moment at the edge. The deformation is found to be a non-linear function of the load and the moment. As an example, calculations of some tanks.

Un problème non-linéaire relatif à l'équilibre des plaques minces. Une plaque plane, circulaire ou en forme de bande infinie, reposant sur un plan non-déformable, est sollicitée par une charge verticale uniforme et un couple fléchissant appliqué au bord. On trouve que la déformation est une fonction non-linéaire de la charge et du moment. Applications au calcul des réservoirs.

F. Pfeiffer in Stuttgart.

On numerical integration of partial differential equations of second order and hyperbolic type in two variables. As the boundary value problems of hyperbolic equations in „normal" form can be solved numerically by the methods of Picard and Ackermann, the author shows a practical way for reducing any hyperbolic equation to the normal form. It avoids numerical differentiations of doubtful accuracy.

Sur l'intégration numérique des équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique à deux variables indépendantes. Les problèmes aux limites relatifs aux équations hyperboliques de forme „canonique" pouvant être résolus numériquement par les méthodes de Picard et d'Ackermann, l'auteur indique un procédé pratique permettant de mettre une équation hyperbolique quelconque dans la forme canonique sans nécessiter des différentiations numériques d'une exactitude douteuse.

U. Graf in Danzig.

On the replacement of scenery by projection in modern theatres. In many theatres the background is formed by the projection of a picture on a concave surface (the „round horizon"). The drawing to be projected must be such that, for a spectator sitting in the house, the perspective image of its projection on the concave surface coincides with the perspective image of the imagined scenery. This implies that any straight line in space is represented on the plane of the drawing by a circle of some well-defined non-euclidean geometry that depends on the surface of projection. Several examples illustrate the method of construction derived from this rule.

Sur le remplacement des décors par la projection dans les théâtres modernes. Dans beaucoup de théâtres on forme le fond par la projection d'une peinture sur une surface concave („l'horizon rond"). Le dessin qu'on projette doit être tel que, pour un spectateur placé dans la salle, l'image perspective de sa projection sur la surface concave coïncide avec l'image perspective des décors qu'il doit remplacer. On en déduit qu'une droite de l'espace est représentée dans le plan du dessin par un cercle d'une géométrie non-euclidienne déterminée par la surface horizon. Cette règle donne lieu à un procédé de construction qui est illustré par plusieurs exemples.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 18 — August 1938 — Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht.

Von *Dietrich Küchemann* in Göttingen.

I. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden die kleinen Störungen untersucht, die in einer längs einer Wand strömenden reibungslosen Flüssigkeit möglich sind, wenn die im äußeren Gebiet konstante Geschwindigkeit in Wandnähe nach Art einer laminaren Grenzschicht nach Null geht. Der eben angenommenen Laminarströmung wird eine ebene Störung überlagert. Für die Berechnung wird die Methode der kleinen Schwingungen angewandt, die in bekannter Weise auf eine Störungsgleichung führt, deren Integrale die Störungskomponenten liefern. Von solchen Störungen interessieren einmal die in der Grenzschicht selbst möglichen Wellen von der Art der von O. Tietjens[1]) für die volumbeständige reibungslose Flüssigkeit gefundenen, dann aber auch die von außen her durch ankommende Wellen hervorgerufenen Vorgänge. Ersteres ist ein Eigenwertproblem, während das letztere ein inhomogenes Randwertproblem darstellt, bei welchem vor allem die Reflexion der Wellen an der Grenzschicht untersucht werden soll.

Aus Gründen der Einfachheit werden wir ein Geschwindigkeitsprofil benutzen, das aus zwei Geradenstücken zusammengesetzt ist. Über das Geschwindigkeitsprofil einer Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte gibt eine Arbeit von A. Busemann[2]) Auskunft. Unter der speziellen Annahme einer ungeheizten und ungekühlten Platte findet Busemann zumindest bei hohen Geschwindigkeiten für die stationäre Strömung ein nahezu lineares Ansteigen der Geschwindigkeit vom Wert Null an der Platte bis zu einem Punkte, wo die Kurve sehr scharf in einem konstanten Wert einbiegt, im Gegensatz zu der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht einer inkompressiblen Flüssigkeitsströmung, welche nach H. Blasius[3]) eine bedeutend sanftere Krümmung besitzt. Unsere Annahme ist also hier in besserer Übereinstimmung mit der Wirklichkeit als die gleiche Annahme bei Tietjens für die volumbeständige Strömung.

Der Druck p der Strömung wird in den Rechnungen mittels $a^2 = dp/d\varrho$ durch die Schallgeschwindigkeit a und die Dichte ϱ ausgedrückt. Die Dichte der ungestörten Strömung ist dabei in Abweichung von der Wirklichkeit aus Gründen der rechnerischen Durchführbarkeit konstant angenommen.

Im Gang der Untersuchung werden wir im ersten Teil die Störungsgleichung aufstellen und integrieren und im zweiten Teil die physikalischen Probleme behandeln.

[1]) O. Tietjens: Beiträge zur Entstehung der Turbulenz, ZAMM 5, 200 (1925).
[2]) A. Busemann: Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte. ZAMM 15, 23 (1935).
[3]) H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56, 1 (1908).

II. Aufstellung der Störungsgleichung.

Wir legen unserer Untersuchung eine zweidimensionale zur x-Achse parallele Laminarströmung mit der Geschwindigkeit $U(y)$ zugrunde und überlagern ihr eine kleine Störung nach der Methode der kleinen Schwingungen, von der wir in den Rechnungen nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigen. Für die Geschwindigkeitskomponenten machen wir den Ansatz:

$$\bar{u}(x, y, t) = U(y) + u(y) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad \text{. . . . . (1)},$$

$$\bar{v}(x, y, t) = v(y) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad \text{. . . . . (2)}.$$

Die Dichte setzen wir entsprechend an:

$$\bar{\varrho}(x, y, t) = \varrho_0 + \varrho(y) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad \text{. . . . . (3)}.$$

Die reelle Konstante α ist gleich $2\pi/\lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Störung ist. Die Konstante β kann komplex sein; der reelle Teil β_r ist die Kreisfrequenz der Störung, während β_i über Anfachung und Dämpfung der Störung entscheidet, je nachdem es positiv oder negativ ist. In $c_r = \beta_r/\alpha$ haben wir die Wellengeschwindigkeit der Störung.

Mit diesem Ansatz gehen wir nun in die Eulerschen Gleichungen und in die Kontinuitätsgleichung hinein:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{a^2}{\bar{\varrho}} \cdot \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{a^2}{\bar{\varrho}} \cdot \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} = -\bar{\varrho}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right).$$

In den Eulerschen Gleichungen ist, wie in der Einleitung bemerkt wurde, der Druck p durch Einführung der Schallgeschwindigkeit a eliminiert. Es ist zunächst unsere Aufgabe, aus diesen drei Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen $u(y)$, $v(y)$ und $\varrho(y)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung, etwa für $\varrho(y)$ allein, auszurechnen. Wir brauchen dann noch die Beziehungen, auf Grund derer wir später aus den Integralen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung $u(y)$ und $v(y)$ ausrechnen können. Im Verlaufe dieser Rechnung wird a als von y unabhängig angenommen. Wir erhalten folgende Differentialgleichung für die Amplitude $\varrho(y)$, die mit ϱ_0 dimensionslos gemacht ist:

$$\frac{d^2 \varrho}{d y^2} - \frac{2\,U'(y)}{U - c} \cdot \frac{d \varrho}{d y} + \alpha^2 \left\{\left(\frac{U - c}{a}\right)^2 - 1\right\} \varrho = 0 \quad \text{. . . . . (4)},$$

wo $c = \beta/\alpha$ gesetzt ist. Der Zusammenhang zwischen $u(y)$, $v(y)$ und $\varrho(y)$ wird durch die Gleichungen

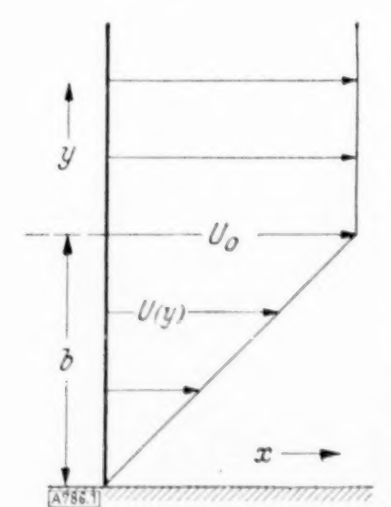


Abb. 1. Geschwindigkeitsprofil der Grundströmung.

$$u(y) = -\frac{a^2\,U'(y)}{\alpha^2 (U - c)^2} \cdot \frac{d \varrho}{d y} - \frac{a^2}{U - c} \cdot \varrho \quad \text{. . . . . (5)}$$

und

$$v(y) = \frac{i\,a^2}{\alpha (U - c)} \cdot \frac{d \varrho}{d y} \quad \text{. . . . . (6)}$$

hergestellt. Wir werden nun eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung $U(y)$ der Laminarströmung annehmen. Wir teilen das Gebiet in zwei Schichten $0 \leq y \leq b$ und $y > b$ ein. In der inneren Schicht sei $U(y) = \gamma \cdot y$ und in der äußeren $U(y) = U_0 = \text{const}$ (Abb. 1). Wir erhalten für jede Schicht eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\varrho(y)$, und zwar in der inneren Schicht:

$$\varrho''(z) - \frac{2}{z} \cdot \varrho'(z) + \alpha^2 \left\{\left(\frac{\gamma z}{a}\right)^2 - 1\right\} \cdot \varrho(z) = 0 \quad \text{. . . . . (7)},$$

wobei eine neue Veränderliche $z = y - c/\gamma$ eingeführt ist. z ist im allgemeinen komplex; nur bei ungedämpften Wellen (c reell) ist z reell. Die Differentialgleichung hat an der Stelle $z = 0$ eine Singularität und zwar eine Stelle der Bestimmtheit.

Die Stelle $z = 0$ ist physikalisch dadurch ausgezeichnet, daß hier die Wellengeschwindigkeit der Störung mit der Geschwindigkeit der Hauptströmung übereinstimmt. Wir müssen zwei partikuläre Integrale $\varrho_1(z)$ und $\varrho_2(z)$ aufsuchen und erhalten daraus mit den Integrations-

konstanten A_1 und A_2 das allgemeine Integral $\varrho_I(z) = A_1\varrho_1(z) + A_2\varrho_2(z)$. Für die äußere Schicht erhalten wir die Differentialgleichung

$$\varrho''(z) - L^2\varrho(z) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Darin haben wir zur Abkürzung

$$L^2 = a^2\left(1 - \left[\frac{\gamma z_b}{a}\right]^2\right) = a^2\left(1 - \left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left[1 - \frac{c}{U_0}\right]^2\right) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

und $z_b = b - c/\gamma$ gesetzt. Die Differentialgleichung (8) stellt der Integration keine Schwierigkeiten entgegen und hat für unsere Untersuchung eine geringere Bedeutung. Das allgemeine Integral kann sofort angegeben werden:

$$\varrho_{II}(z) = B_1 e^{+Lz} + B_2 e^{-Lz} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

B_1 und B_2 sind Integrationskonstanten. Der Größe L kommt eine besondere physikalische Bedeutung zu, die später eingehend zu erörtern ist.

Für späteren Gebrauch schreiben wir noch die Gl. (5) und (6) für die speziellen Geschwindigkeitsprofile um. In der inneren Schicht bekommen wir

$$u(z) = -\frac{a^2}{\gamma}\left(\frac{\varrho'}{(az)^2} + \frac{\varrho}{z}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5a)$$

$$v(z) = \frac{i\,a^2}{a\gamma z}\varrho' \quad \ldots \ldots \quad (6a)$$

und in der äußeren:

$$u(z) = \frac{-a^2}{U_0 - c}\cdot\varrho \quad \ldots \ldots \quad (5b),$$

$$v(z) = \frac{i\,a^2}{a(U_0 - c)}\cdot\varrho' \quad \ldots \ldots \quad (6b).$$

III. Fundamentalsysteme von Integralen der Störungsgleichung.

1. Erste Integrationsmethode der Differentialgleichung der inneren Schicht. Wir wenden uns der Integration der Differentialgleichung (7) zu, welche nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgenommen wird. Danach ist ein Fundamentalsystem von Lösungen durch

$$\varrho_1(z) = z^{\sigma_1}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu z^\nu, \qquad \varrho_2(z) = z^{\sigma_2}\cdot\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu z^\nu + A'\cdot\log z\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu z^\nu\right] \quad \ldots \quad (11)$$

gegeben. Die Konvergenz dieser Reihen wird später untersucht werden. — Für die Exponenten σ_1 und σ_2 erhalten wir $\sigma_1 = 3$ und $\sigma_2 = 0$, Werte, die sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Im allgemeinen ist dann die Konstante A' in (11) von Null verschieden. Eine durchgeführte Rechnung zeigt jedoch, daß in unserem besonderen Falle $A' = 0$ ist. Die Koeffizienten der normierten Potenzreihen ergeben sich aus den Rekursionsformeln

$$\gamma_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+3)}\left[a^2\gamma_{\nu-2} - \left(\frac{a\,U_0}{a\,b}\right)^2\gamma_{\nu-4}\right], \qquad \delta_\nu = \frac{1}{\nu(\nu-3)}\left[a^2\delta_{\nu-2} - \left(\frac{a\,U_0}{a\,b}\right)^2\delta_{\nu-4}\right] \quad \ldots \quad (12).$$

Damit erhalten wir Reihenentwicklungen für die partikulären Integrale ϱ_1 und ϱ_2, welche folgendermaßen beginnen:

$$\left.\begin{aligned} a^3\cdot\varrho_1(z) &= (a\,b)^3\cdot(z/b)^3 + 0{,}1\cdot(a\,b)^5\cdot(z/b)^5 \\ &\quad + \{0{,}03571\,(a\,b)^7 - 0{,}03571\,(a\,b)^5\cdot(U_0/a)^2\}\cdot(z/b)^7 + \cdots\cdots \\ \varrho_2(z) &= 1 - 0{,}5\,(a\,b)^2\cdot(z/b)^2 \\ &\quad + \{-0{,}1250\,(a\,b)^4 - 0{,}2500\,(a\,b)^2\cdot(U_0/a)^2\}\cdot(z/b)^4 + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13).$$

Es zeigt sich, daß ϱ_1 eine ungerade und ϱ_2 eine gerade Funktion von z ist. Die Koeffizienten von z/b sind Polynome in U_0/a und $a\,b$.

2. Konvergenz- und Regularitätsfragen. Wir haben zunächst die Frage nach der Konvergenz der Reihen zu beantworten. Nach der allgemeinen Theorie ist die Konvergenz der Integrale in der Umgebung von $z = 0$ als gesichert anzusehen, in der die Koeffizientenpotenzreihen in der Normalform der Differentialgleichung

$$z^2\cdot\varrho'' + z\,\mathfrak{P}_1(z)\cdot\varrho' + \mathfrak{P}_2(z)\cdot\varrho = 0$$

konvergent sind. Da wir in unserem Falle hier Polynome stehen haben, sind die Integrale in der ganzen Ebene absolut konvergent.

Als zweites ist es sehr wichtig, zu wissen, daß die Integrale bei $z=0$ regulär bleiben. Daß dies wirklich der Fall ist, zeigte uns das Verschwinden des Faktors A' in (11) an. Die Stelle $z=0$ ist daher ein „Nebenpunkt". Die Regularität von u_1 und v_1 entsprechend der von ϱ_1 bei $z=0$ ist nach den Gl. (5a) und (6a) unmittelbar einzusehen, da ϱ_1 mit z^3 beginnt. Dasselbe gilt für v_2. Nur u_2 macht eine besondere Untersuchung notwendig. Die Entwicklung von u_2 beginnt gemäß (5a) und (13) mit

$$-\frac{a^2}{\gamma}\cdot\left(-\frac{1}{z}-\frac{a^2}{2}z+\cdots+\frac{1}{z}-\frac{a^2}{2}z+\cdots\right)=\frac{a^2}{\gamma}(a^2 z+\cdots);$$

das bei $z=0$ unangenehme Glied $1/z$ fällt demnach heraus. Damit ist gezeigt, daß sämtliche Störungskomponenten auch ohne Berücksichtigung der Reibung an der singulären Stelle $z=0\,(U=c)$ regulär und eindeutig bleiben.

Zum Dritten wollen wir noch die Möglichkeit einer Parameterentwicklung untersuchen. Die Entwicklung der Integrale nach Potenzreihen in z ist rechnerich unbequem. Da bei Berücksichtigung der Kompressibilität das Verhältnis U_0/a für den Bewegungszustand charakteristisch ist, liegt es nahe, bei unseren Integralen eine Entwicklung nach diesem Parameter zu versuchen.

In der Differentialgleichung (7) tritt $U_0/a=\gamma\, b/a$ als Parameter auf. Als Integrale dieser Differentialgleichung erhielten wir zwei absolut konvergente Potenzreihen

$$\varrho=\sum_n a_n z^n.$$

Wir setzen nun

$$a_n z^n = f_n, \qquad \text{so daß} \qquad \varrho=\sum_n f_n \text{ ist,}$$

schreiben also die Potenzreihen als Funktionenreihen. Diese sind wegen der absoluten Konvergenz der Reihen auch bezüglich U_0/a gleichmäßig konvergent. Ferner sind f_n Polynome in U_0/a, wie wir im Anschluß an die Gl. (13) bemerkten. Danach sind die Voraussetzungen des Weierstraßschen Doppelreihensatzes erfüllt. Man kann also die Reihen für ϱ_1 und ϱ_2 nach Potenzen von U_0/a ordnen.

Nachdem wir so gesehen haben, daß eine Entwicklung nach U_0/a erlaubt ist und auf gleichmäßig konvergente Reihen führt, gehen wir daran, diese Integrale wirklich aufzustellen. Wir bauen ein neues Fundamentalsystem von Integralen auf, welches die gewünschte Eigenschaft besitzt und geben dann die Transformation an, die diese neuen Integrale in die alten überführen.

3. Eine andere Integrationsmethode. Wir gewinnen die neuen Integrale durch Anwendung einer Methode der schrittweisen Annäherung. Wir entwickeln nach Potenzen von U_0/a und gehen zunächst bis zu den Gliedern mit U_0^4/a^4. Eine Überschlagsrechnung zeigt uns, daß diese Genauigkeit bei den längeren und mittleren Wellenlängen (bis unter $\lambda=2\pi b$) ausreicht. (Rechnen wir z. B. mit $U_0/a=1{,}5$, $a\,b=1$, $z=b$, dann haben die von U_0/a freien Glieder höchstens die Größenordnung $1\cdot b^3$, die Glieder mit U_0^2/a^2 die Größenordnung $(1/9)\cdot b^3$, die Glieder mit U_0^4/a^4 höchstens die Größenordnung $(1/2000)\cdot b^3$, während die Glieder mit U_0^6/a^6 nur noch höchstens die Größenordnung $10^{-4}\cdot b^3$ haben. Eine genauere Untersuchung folgt in III, 5.) Wir verwenden eine Methode, die im allgemeinen Falle folgendermaßen verläuft: Gegeben sei etwa das Anfangswertproblem

$$y''+A(x)\,y'+B(x)\,y+C(x)\,y=0$$

mit

$$y_1=0, \qquad y'_1\neq 0, \qquad y_2\neq 0, \qquad y'_2=0$$

für $x=0$. Wir nehmen an, daß $y''+A\,y'+B\,y=0$ eine uns bekannte Lösung besitzt. Dann lösen wir zunächst die letzte Differentialgleichung und legen die Lösungen durch die gegebenen Anfangsbedingungen fest. Das vernachlässigte Glied $C(x)\,y$ wird beim nächsten Schritt in erster Näherung berücksichtigt. Als zweites lösen wir daher

$$y''+A\,y'+B\,y=-C\cdot y^{(1)}$$

und weiter

$$y''+A\,y'+B\,y=-C\,y^{(2)},$$

wenn $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ die Lösungen der vorigen Gleichungen unter den angegebenen Anfangsbedingungen sind. Auf diese Art können wir uns schrittweise die exakten Lösungen aufbauen. Die Konvergenz des Verfahrens wird später an dem Beispiel untersucht werden. In unserem Falle haben wir nach dieser Methode keine eindeutige Bestimmung der Lösungen, da die Bedingung $y'=0$ bei $x=0$ immer erfüllt ist. Wir müssen also eine andere Tatsache heranziehen, um die Integrale eindeutig festzulegen. Da benutzen wir nun die Forderung, daß wir die neuen Lösungen durch eine lineare Zusammensetzung in die alten Lösungen von III,2 überführen wollen. Die erste Lösung ϱ_1 aus (13) beginnt mit z^3 und ist eine ungerade Funktion von z, während ϱ_2 mit 1 beginnt und eine gerade Funktion von z ist. Wir fordern daher für die erste Kombination: In der sich daraus ergebenden Lösung ϱ_1 sei der

Koeffizient des konstanten Gliedes 0,

Koeffizient des Gliedes mit z^3 1;

wir fordern für die zweite Kombination: In der sich daraus ergebenden Lösung ϱ_2 sei der

Koeffizient des konstanten Gliedes 1,

Koeffizient des Gliedes mit z^3 0.

Auf diese Weise bekommen wir zwei eindeutig bestimmte Lösungen. In unserem Falle nehmen wir $B=-\alpha^2 C=\alpha^2\cdot(U_0/a)^2(z/b)^2$. Es ist unmittelbar einzusehen, daß unsere Integrationsmethode gleichbedeutend mit einer Entwicklung der Integrale nach Potenzen von C ist. Wir entwickeln demnach die Integrale nach dem Produkt von $(U_0/a)^2$ und α. Die Güte einer Näherung hängt also nicht allein von der Größe von U_0/a ab, sondern auch von der von α. Die später benutzte Näherung bis zu den Gliedern mit $(U_0/a)^4$ oder auch nur $(U_0/a)^2$ wird also bei größeren U_0/a und größeren α-Werten versagen. Eine genaue Betrachtung über den Gültigkeitsbereich der einzelnen Lösungen wird später in III,5 durchgeführt.

Die Näherungen $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$ erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$\varrho''-\frac{2}{z}\cdot\varrho'-\alpha^2\varrho=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Diese hat die Lösungen

$$\varrho^{(1)}=e^{+\alpha z}(-1+\alpha z); \qquad \varrho^{(2)}=e^{-\alpha z}(1+\alpha z).$$

Wir können jetzt schon feststellen, daß die Kombinationen

$$\varrho_1=\frac{3}{2\alpha^3}(\varrho^{(1)}+\varrho^{(2)}) \quad \text{und} \quad \varrho_2=\frac{1}{2}(\varrho^{(2)}-\varrho^{(1)})$$

alle gestellten Bedingungen erfüllen. In allen durch die höheren Näherungen hinzukommenden Ausdrücken müssen daher alle konstanten, linearen, quadratischen und kubischen Glieder in z fortfallen. Als Integrale der nächsten Differentialgleichungen

$$\varrho''-\frac{2}{z}\varrho'-\alpha^2\varrho=-\alpha^2\left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left(\frac{z}{b}\right)^2 e^{\alpha z}(-1+\alpha z)$$

und

$$\varrho''-\frac{2}{z}\varrho'-\alpha^2\varrho=-\alpha^2\left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left(\frac{z}{b}\right)^2 e^{-\alpha z}(1+\alpha z)$$

erhalten wir

$$\varrho^{(3)}=e^{+\alpha z}\left(\frac{\alpha U_0}{a\,b}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{12}\frac{z^3}{\alpha}-\frac{1}{6}z^4\right)+\text{Lösungen von (14)}$$

und

$$\varrho^{(4)}=e^{-\alpha z}\left(\frac{\alpha U_0}{a\,b}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{12}\frac{z^3}{\alpha}+\frac{1}{6}z^4\right)+\text{Lösungen von (14).}$$

Das in beiden Integralen entgegen den vorgeschriebenen Bedingungen doch auftretende Glied

$$\frac{5}{12}\left(\frac{\alpha U_0}{a\,b}\right)^2\frac{z^3}{\alpha}$$

muß fortgeschafft werden. Zu diesem Zwecke fügen wir das Integral der homogenen Gl. (14)

$$C_1\cdot e^{+\alpha z}(-1+\alpha z)+C_2\,e^{-\alpha z}(1+\alpha z)$$

hinzu und bestimmen die Konstanten C_1 und C_2 so, daß die Glieder mit z^3 sich aufheben. Durch die hinzugenommenen Ausdrücke dürfen, unserer Anforderung entsprechend, keine neuen konstanten, linearen und quadratischen Glieder in z dazutreten, und so gilt zunächst $C_1 = C_2$ und weiter

$$\frac{5}{12}\left(\frac{a\,U_0}{a\,b}\right)^2 \frac{z^3}{a} + C_1 \cdot \frac{2\,a^3}{3}\,z^3 = 0 \qquad \text{also} \qquad C_1 = -\frac{5}{8}\left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{(a\,b)^2}.$$

Damit haben wir endgültig als Ausdrücke, die durch die zweite Näherung hinzukommen:

$$\varrho^{(3)} = a^2\left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \left\{e^{\alpha z}\left(\frac{5}{12}\frac{z^3}{a\,b^2} - \frac{1}{6}\frac{z^4}{b^2}\right) - \frac{5}{8}\frac{1}{a^4\,b^2}\left[e^{\alpha z}(-1+a\,z) + e^{-\alpha z}(1+a\,z)\right]\right\}$$

$$\varrho^{(4)} = a^2\left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \left\{e^{-\alpha z}\left(\frac{5}{12}\frac{z^3}{a\,b^2} + \frac{1}{6}\frac{z^4}{b^2}\right) - \frac{5}{8}\frac{1}{a^4\,b^2}\left[e^{\alpha z}(-1+a\,z) + e^{-\alpha z}(1+a\,z)\right]\right\}.$$

Nach dieser Methode kann die Rechnung fortgeführt werden. Wir bestimmen noch die folgende Näherung und erhalten, nachdem wir in der oben angegebenen Weise kombiniert haben, statt der Integrale (13) die Integrale (15), welche die gewünschten Eigenschaften besitzen.

$$\left.\begin{aligned}
a^3\varrho_1(z) = e^{+\alpha z}\Big\{&-1.500 + 1.500\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)\\
&+\left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left[+\frac{1.875}{(a\,b)^2} - \frac{1.875}{(a\,b)}\left(\frac{z}{b}\right) + 0{,}6250\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^3 - 0{,}2500\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^4\right]\\
&+\left(\frac{U_0}{a}\right)^4\left[-\frac{0{,}9844}{(a\,b)^4} + \frac{0{,}9844}{(a\,b)^3}\left(\frac{z}{b}\right) - \frac{0{,}3281}{(a\,b)}\left(\frac{z}{b}\right)^3 - 0{,}1406\left(\frac{z}{b}\right)^4\right.\\
&\left.+0{,}2719\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^5 - 0{,}1208\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^6 + 0{,}02083\,(a\,b)^3\left(\frac{z}{b}\right)^7\right] + \cdots\Big\}\\
+ e^{-\alpha z}\Big\{&+1.500 + 1.500\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)\\
&+\left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left[-\frac{1.875}{(a\,b)^2} - \frac{1.875}{(a\,b)}\left(\frac{z}{b}\right) + 0{,}6250\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^3 + 0{,}2500\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^4\right]\\
&+\left(\frac{U_0}{a}\right)^4\left[+\frac{0{,}9844}{(a\,b)^4} + \frac{0{,}9844}{(a\,b)^3}\left(\frac{z}{b}\right) - \frac{0{,}3281}{(a\,b)}\left(\frac{z}{b}\right)^3 + 0{,}1406\left(\frac{z}{b}\right)^4\right.\\
&\left.+0{,}2719\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^5 + 0{,}1208\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^6 + 0{,}02083\,(a\,b)^3\left(\frac{z}{b}\right)^7\right] + \cdots\Big\};\\
\varrho_2(z) = e^{+\alpha z}\Big\{&0{,}5 - 0{,}5\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right) + \left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left[-0{,}2083\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^3 + 0{,}08333\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^4\right]\\
&+\left(\frac{U_0}{a}\right)^4\left[-\frac{0{,}3021}{(a\,b)}\left(\frac{z}{b}\right)^3 + 0{,}3021\left(\frac{z}{b}\right)^4 - 0{,}1813\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^5 + 0{,}08056\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^6\right.\\
&\left.-0{,}01389\,(a\,b)^3\left(\frac{z}{b}\right)^7\right] + \cdots\Big\}\\
+ e^{-\alpha z}\Big\{&0{,}5 + 0{,}5\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right) + \left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left[+0{,}2083\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^3 + 0{,}08333\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^4\right]\\
&+\left(\frac{U_0}{a}\right)^4\left[+\frac{0{,}3021}{(a\,b)}\left(\frac{z}{b}\right)^3 + 0{,}3021\left(\frac{z}{b}\right)^4 + 0{,}1813\,(a\,b)\left(\frac{z}{b}\right)^5 + 0{,}08056\,(a\,b)^2\left(\frac{z}{b}\right)^6\right.\\
&\left.+0{,}01389\,(a\,b)^3\left(\frac{z}{b}\right)^7\right] + \cdots\Big\}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15).$$

Die Richtigkeit dieser Integrale wurde durch Einsetzen in die Differentialgleichung (7) nachgeprüft.

4. Asymptotische Integration für sehr große U_0/a. Nachdem wir durch Aufstellung der Integrale (15) die vollständige Störungsdifferentialgleichung der inneren Schicht allgemein integriert haben, wollen wir noch den Sonderfall $U_0 \gg a$ betrachten, in welchem eine abgeänderte Differentialgleichung geschlossen integriert werden kann. Der Koeffizient von ϱ in (7) lautet:

$$a^2\left[(U_0/a)^2 \cdot (z/b)^2 - 1\right].$$

Da in der inneren Schicht $-c/U_0 \leq z/b \leq 1 - c/U_0$ ist, können wir für $U_0 \gg a$ diesen Koeffizienten durch

$$[a \cdot (U_0/a) \cdot (z/b)]^2$$

annähern. Die Umgebung von $z = 0$ muß zunächst ausgeschlossen werden. Wir werden jedoch später sehen, daß die mit dieser Vereinfachung aufgestellten Integrale sich an dieser Stelle genau so verhalten, wie die Integrale (13) und (15), von denen wir gezeigt haben, daß sie bei $z = 0$ regulär und eindeutig sind. Die nun aus (7) entstehende Differentialgleichung

$$\varrho'' - (2/z) \cdot \varrho' + [a\,(U_0/a) \cdot (z/b)]^2 \cdot \varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

kann exakt mit Hilfe von Zylinderfunktionen gelöst werden und hat als partikuläre Integrale

$$z^{3/2}\, Z_{3/4}\left(\frac{a\,U_0}{2\,a\,b}\, z^2\right) \quad \text{und} \quad z^{3/2}\, Z_{-3/4}\left(\frac{a\,U_0}{2\,a\,b}\, z^2\right).$$

Wir benutzen die Besselschen Funktionen erster Art, da $J_{3/4}$ und $J_{-3/4}$ linear unabhängig voneinander sind und erhalten als endgültige Integrale, nachdem wir die Funktionen normiert haben:

$$\left.\begin{aligned} a^3\,\varrho_{1a} &= (3/4)! \cdot (a\,b)^{9/4} \cdot \left(\frac{U_0}{4\,a}\right)^{-3/4} \cdot \left(\frac{z}{b}\right)^{3/2} \cdot J_{+3/4}\left(\frac{ab}{2} \cdot \frac{U_0}{a} \left[\frac{z}{b}\right]^2\right) \\ \varrho_{2a} &= (-3/4)! \cdot (a\,b)^{3/4} \cdot \left(\frac{U_0}{4\,a}\right)^{3/4} \cdot \left(\frac{z}{b}\right)^{3/2} \cdot J_{-3/4}\left(\frac{ab}{2} \cdot \frac{U_0}{a} \left[\frac{z}{b}\right]^2\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Entwickeln wir diese Funktionen in ihre Potenzreihen

$$a^3\,\varrho_{1a} = (a\,b)^3 \left(\frac{z}{b}\right)^3 - 0{,}03571\,(a\,b)^5 \left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \left(\frac{z}{b}\right)^7 + \cdots$$

$$\varrho_{2a} = 1 - 0{,}25\,(a\,b)^2 \left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \left(\frac{z}{b}\right)^4 + \cdots,$$

so sehen wir, daß sie sich bei $z = 0$ genau so wie die exakten Integrale verhalten, wie oben behauptet wurde. Sie haben also im ganzen Bereich $-z_0 \leq z \leq z_b$ Gültigkeit.

ϱ_{1a} und ϱ_{2a} sind nach (17) durch Produkte zweier mehrdeutiger Funktionen dargestellt. Da positive und negative reelle Veränderliche vorkommen, müssen wir das Verhalten am Verzweigungspunkt $z = 0$ untersuchen und so festsetzen, daß das Produkt beider Funktionen sich wie die früher aufgestellten ϱ-Funktionen eindeutig verhält. Als Beispiel betrachten wir ϱ_{1a}. Den ersten Faktor $z^{3/2}$ schreiben wir in den üblichen Bezeichnungen

$$z^{3/2} = r^{3/2} \cdot e^{i\frac{3\varphi}{2}}$$

und setzen $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dann ist für negativ reelle z $\varphi = +\pi$ und

$$z^{3/2} = |z|^{3/2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Für den zweiten Faktor ziehen wir die Tatsache heran, daß allgemein $J_p(z)/z^p$ für jedes p und alle z eine reguläre gerade Funktion von z ohne Verzweigungspunkte im Endlichen ist. z^p gibt also das Verhalten am Verzweigungspunkte $z = 0$ an, so daß sich die obige Besselsche Funktion in (17) wie $z^{3/2}$ verhält. Da nun $\varrho_{1\bar{a}}$ eine ungerade Funktion von z sein soll, muß für negativ reelle z mit $\varphi = +\pi$ gelten

$$J_{3/4}\left(a\,b\,\frac{U_0}{2\,a}\left|\frac{z}{b}\right|^2\right) = e^{i\frac{3\pi}{2}} \cdot J_{3/4}\left(a\,b\,\frac{U_0}{2\,a}\left|\frac{z}{b}\right|^2\right),$$

womit das Verhalten dieser Besselschen Funktion am Verzweigungspunkt in der richtigen Weise festgesetzt ist; denn der Ausdruck $\left(\frac{3}{4}\right)! \, (a\,b)^{9/4} \left(\frac{U_0}{4\,a}\right)^{-3/4} \left(\frac{z}{b}\right)^{3/2} J_{3/4}\left(a\,b\,\frac{U_0}{2\,a}\left[\frac{z}{b}\right]^2\right)$ ändert beim Übergang von positiv reellen zu negativen z sein Vorzeichen, wie es eine Darstellung von ϱ_{1a} tun muß. Für ϱ_{2a} und alle später auftretenden Besselschen Funktionen gilt entsprechendes.

5. Zusammenhang und Gültigkeitsbereich der einzelnen Darstellungen der Integrale. Wir haben nun in den Integralen (15) und (17) verschiedene Darstellungen der Lösungen unserer Differentialgleichung (7), deren Zusammenhang und Gültigkeitsbereich noch untersucht werden muß. Besonders interessieren wir uns für ihre Abhängigkeit von dem Parameter U_0/a. Wir

nehmen dazu für α und z feste Werte an und werden sehen, bis zu welchen Geschwindigkeiten die einzelnen Integrale benutzt werden dürfen. Dieselbe Rechnung führen wir auch für die Ableitungen der Integrale durch, da diese ebenfalls in die Randbedingungen eingehen.

Wir wählen zunächst αb gleich 1 und z/b gleich 1/2; dann ist nach den Formeln (15) und (17):

$$\alpha^3 \varrho_1 = 0{,}1281 - 0{,}0002\,(U_0/\alpha)^2 - 0{,}00004\,(U_0/\alpha)^4 + \cdots,$$

$$\varrho_2 = 0{,}8671 - 0{,}0153\,(U_0/\alpha)^2 + 0{,}00008\,(U_0/\alpha)^4 + \cdots,$$

$$\alpha^3 \varrho_{1a} = 0{,}3250 \cdot (U_0/4\,\alpha)^{-3/4} \cdot J_{3/4}\,(U_0/8\,\alpha),$$

$$\varrho_{2a} = 1{,}2820 \cdot (U_0/4\,\alpha)^{+3/4} \cdot J_{-3/4}\,(U_0/8\,\alpha).$$

Für die Ableitungen erhalten wir:

$$\alpha^2 \varrho_1' = 0{,}7816 - 0{,}002995 \cdot (U_0/\alpha)^2 + 0{,}00000437\,(U_0/\alpha)^4 + \cdots,$$

$$\frac{1}{\alpha}\varrho_2' = -0{,}5638 - 0{,}1221\,(U_0/\alpha)^2 - 0{,}01852\,(U_0/\alpha)^4 + \cdots,$$

$$\alpha^2 \varrho_{1a}' = 0{,}6500\,(U_0/4\,\alpha)^{1/4} \cdot J_{-1/4}\,(U_0/8\,\alpha),$$

$$\frac{1}{\alpha}\varrho_{2a}' = -2{,}5640 \cdot (U_0/4\,\alpha)^{7/4} \cdot J_{+1/4}\,(U_0/8\,\alpha).$$

Das Ergebnis ist in Abb. 2 und 3 aufgetragen. Darin bedeuten die in Klammern gesetzten Indizes (1), daß nur die Glieder mit $(U_0/\alpha)^2$ berücksichtigt sind, und (2), daß auch die Glieder mit $(U_0/\alpha)^4$ berücksichtigt sind. Wir können so gut beurteilen, wann und in welcher Weise sich das Glied mit $(U_0/\alpha)^4$ bemerkbar macht. Wir sehen an der Abbildung, daß die Integrale (15) bei dieser Wahl der Wellenlänge bis weit über die Schallgeschwindigkeit hinaus Gültigkeit haben und sich gut an die asymptotischen Integrale (17) anschließen. Entsprechendes gilt auch von den Ableitungen der Integrale. Die spätere Berechnung der Eigenwerte aus den Integralen (15) geschieht bei $U_0/\alpha = 1{,}5$. Wir können jetzt schon feststellen, daß wir bei dieser Rechnung die Glieder mit $(U_0/\alpha)^4$ nicht mehr zu berücksichtigen brauchen, wenn wir uns auf αb-Werte unter 1 beschränken.

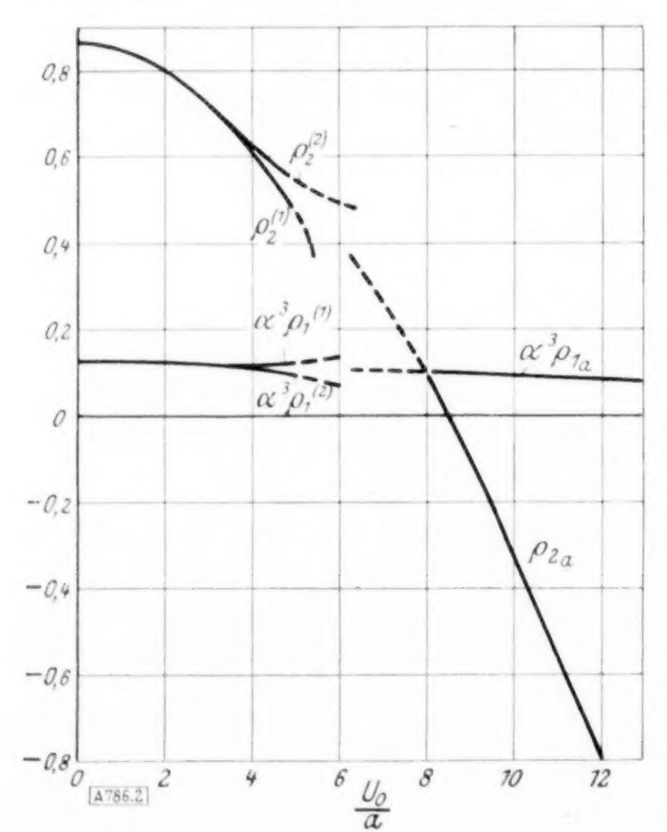


Abb. 2. Übergang von den Integralen für kleinere Geschwindigkeiten zu den asymptotischen Integralen.

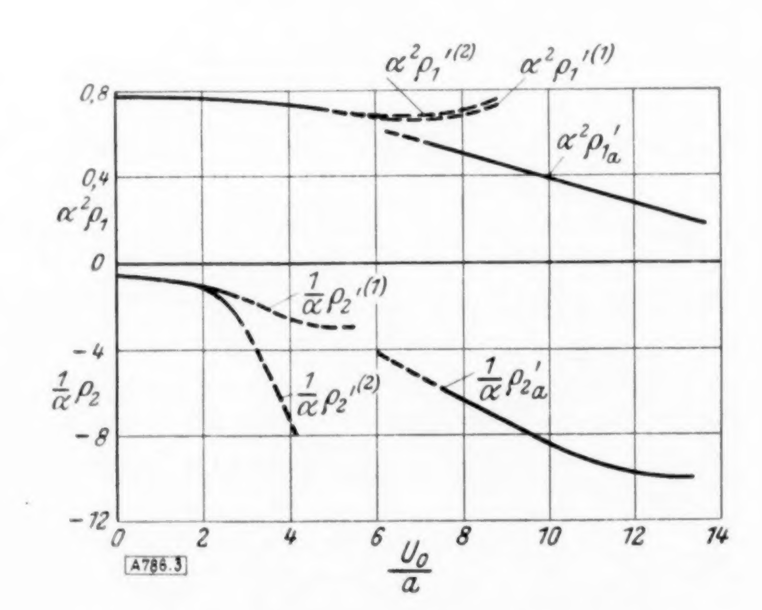


Abb. 3. Übergang von den Ableitungen der Integrale für kleinere Geschwindigkeiten zu denen der asymptotischen Integrale.

Leider erhalten wir dasselbe günstige Ergebnis für kleinere Wellenlängen nicht, wie wir das auch schon in III, 4 vermutet haben. Wählen wir bei $z = b/2$, $\alpha b = 20$, bekommen wir überhaupt keinen Übergang von den Integralen (15) zu den Integralen (17). Während sich ϱ_1 in Größenordnung 10^5 bis 10^6 bewegt, liegt ϱ_{1a} bei 10^1 und 10^2. Der Grund für dies Verhalten ist darin zu suchen, daß für diese Wellenlängen die Integrale (15) als Näherung nicht mehr ausreichen. Wir können also zusammenfassen: Die Integrale (13) und (15) gelten bei längeren und mittleren Wellenlängen bis unter $\lambda = 2\pi b$ bis etwa zur vierfachen Schallgeschwindigkeit, während die Gültigkeitsgrenze für kleiner werdende Wellenlängen immer mehr herabsinkt.

Wollten wir erreichen, daß die Integrale für kleinere Wellenlängen auch richtig wären, müßten wir in der Entwicklung nach $a\,b$ und damit auch U_0/a noch einige Schritte weitergehen. Wir würden uns dann jedoch sehr großen rechnerischen Schwierigkeiten gegenübersehen. Ein anderer Weg wäre der Versuch, die Störungsgleichung unter der Annahme einer sehr kleinen Wellenlänge ($a\,b$ sehr groß) zu integrieren. Vielleicht wäre dann eine Interpolation zwischen diesen Integralen und den schon aufgestellten über das unbekannte Zwischengebiet hinweg möglich. Dieser 2. Methode ist der Vorzug vor der anderen zu geben, da sie uns eher die Möglichkeit gibt, die prinzipiellen Zusammenhänge zu durchschauen. Diese Untersuchungen sind allerdings noch nicht durchgeführt, weil es uns möglich war, auch bei Beschränkung auf große und mittlere Wellenlängen zu physikalischen Ergebnissen zu gelangen. — Die Integrale (17) gelten bei Geschwindigkeiten, die etwa über der 8- bis 10fachen Schallgeschwindigkeit liegen. Bei ihnen treten keine Schwierigkeiten mit der Wellenlänge auf.

IV. Randbedingungen.

Wir haben nun nach Aufstellung der Integrale die Mittel an der Hand, die wir für unser physikalisches Problem brauchen. Als allgemeines Integral erhielten wir in der inneren Schicht:

$$\varrho_{\mathrm{I}} = A_1 \cdot \varrho_1(z) + A_2\,\varrho_2(z)$$

und in der äußeren Schicht:

$$\varrho_{\mathrm{II}} = B_1 \cdot e^{+Lz} + B_2\,e^{-Lz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

wobei ϱ_1 und ϱ_2 durch (13), (15) oder (17) gegeben sind. Wir haben also insgesamt vier Integrationskonstanten A_1, A_2, B_1 und B_2, welche wir durch vier Randbedingungen festlegen können. Durch diese Bedingungen können wir erreichen, daß die Integrale an der Wand, am Knick des Geschwindigkeitsprofiles und im Unendlichen physikalisch sinnvoll zusammengesetzt werden. Besondere Aufmerksamkeit erfordert das Verhalten im Unendlichen, wo vor allem gefordert werden muß, daß die Störungskomponenten nicht selbst unendlich groß werden. Da ϱ in der zweiten Schicht aus Exponentialfunktionen von $+Lz$ und $-Lz$ gebildet ist, müssen wir die Größe L näher betrachten, welche uns durch (9) in Form einer Quadratwurzel gegeben ist. L ist im allgemeinsten Falle komplex: $L = L_r + i\,L_i$. Da in den Exponenten der e-Funktionen in (10) beide Vorzeichen vorkommen, können wir willkürlich festsetzen, daß das Vorzeichen des Realteils L_r positiv sein soll, falls L_r nicht Null ist. Das Verhalten der Störungsgrößen fordert nun nach dem Obigen eine grundsätzliche Unterscheidung der beiden Fälle

$$\mathrm{I.}\ L_r > 0\,, \qquad \mathrm{II.}\ L_r = 0\,.$$

Im ersten Falle muß $B_1 = 0$ sein. Die Störungsgrößen klingen dann nach (10) gegen das Unendliche hin exponentiell ab, so daß wir es mit S t ö r u n g e n i n W a n d n ä h e zu tun haben. Für reelle c, denen wegen $c_i = 0$ indifferente Schwingungen entsprechen, ergibt sich für $L_r > 0$ noch eine bemerkenswerte Einschränkung des Bereiches der Wellengeschwindigkeiten c_r, die sich für $U_0/a \geq 1$ bemerkbar macht und in dem entsprechenden inkompressiblen Problem nicht auftritt: Damit L_r mit

$$L = a\sqrt{1-\left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left(1-\frac{c_r}{U_0}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9\mathrm{a})$$

nicht Null ist, muß

$$1-\left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left(1-\frac{c_r}{U_0}\right)^2 > 0$$

sein, d. h.

$$U_0 - a < c_r < U_0 + a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Die Wellengeschwindigkeit unterscheidet sich demnach um weniger als die Schallgeschwindigkeit von der Grundströmungsgeschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht bei den Störungen in Wandnähe.

Im zweiten Fall $L_r = 0$ ist ϱ im Unendlichen beschränkt, ohne daß wir Aussagen über die Integrationskonstanten B_1 und B_2 machen müßten. Es handelt sich hier also um von a u ß e n k o m m e n d e S t ö r u n g e n. Für reelle c erhalten wir auch in diesem Falle eine Einschränkung für den Bereich der Wellengeschwindigkeiten aus (9a):

Wegen $L_r = 0$ muß

$$-\infty < c_r < U_0 - a \quad \text{und} \quad U_0 + a < c_r < +\infty \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

sein. Diese Ungleichungen sind erfüllt, wenn wir

$$c_r = U_0 - \frac{a}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$0 < \varphi < 180^\circ$$

setzen.

Wir betrachten damit aus dem Unendlichen kommende Störungen, deren Wellennormale mit der Wand einen Winkel φ bildet. Diese Störungen konnten bei dem entsprechenden inkompressiblen Problem nicht vorkommen, wie aus der Bedingung (19) ohne weiteres ersichtlich ist ($a = \infty$ für inkompressible Medien).

In den Bedingungen (18) und (19) sind die Fälle $c_r = U_0 - a$ und $c_r = U_0 + a$ bisher ausgeschlossen. Diese bedeuten, daß sowohl L_r wie auch L_i verschwinden. Dieser Sonderfall wird immer eine besondere Betrachtung erfordern. Er stellt den Grenzfall zwischen den beiden vorigen dar und kann von beiden Seiten her erhalten werden. — Wir werden später sehen, daß den angegebenen Fällen grundsätzlich verschiedene Fragestellungen entsprechen.

Wir wenden uns nun wieder den Randbedingungen zu. Da die Bedingung im Unendlichen erfüllt ist durch die obigen Abmachungen, können wir nur noch drei Bedingungen stellen: Als erstes verlangen wir, daß die Querkomponente der Störung an der Wand verschwindet. An dem Knick des Geschwindigkeitsprofils müssen die Querkomponente der Störung sowie der Druck und damit auch die Dichte stetig bleiben. Die Randbedingungen, die wir durch $\varrho(z)$ auszudrücken haben, lauten demnach:

1. An der Wand, für $z = -c/\gamma = -z_0$ sei $v = 0$.
2. Am Knick, für $z = b - c/\gamma = z_b$ sei ϱ stetig.
3. Am Knick, für $z = b - c/\gamma = z_b$ sei v stetig.

Wir gehen nun daran, diese Bedingungen auf ϱ zu übertragen. Der Zusammenhang zwischen ϱ und den übrigen Störungsgrößen ist für beide Schichten durch die Gl. (5a), (6a), (5b) und (6b) gegeben. Wir unterscheiden jetzt zwischen den angegebenen Fällen und betrachten zunächst die Störungen in Wandnähe. In diesem Falle lauten die Randbedingungen, auf ϱ übertragen:

$$A_1 \varrho_1' + A_2 \varrho_2' = 0 \qquad \text{für} \quad z = -z_0 \quad \dots \quad (21),$$

$$A_1 \varrho_1 + A_2 \varrho_2 = B_2 e^{-Lz} \qquad \text{für} \quad z = z_b \quad \dots \quad (22),$$

$$A_1 \varrho_1' + A_2 \varrho_2' = -B_2 L e^{-Lz} \qquad \text{für} \quad z = z_b \quad \dots \quad (23).$$

Dieses sind drei Gleichungen für die verbleibenden drei Integrationskonstanten A_1, A_2 und B_2. Wir haben also ein homogenes Randwertproblem vor uns, so daß die vorkommenden Parameter α und c nicht frei wählbar, sondern als Eigenwerte voneinander abhängig sind. Es ist dies das eigentliche Stabilitätsproblem, welches für volumbeständige Strömungen von O. Tietjens (a. a. O.) behandelt worden ist. Für den praktischen Gebrauch eliminieren wir B_2 aus (22) und (23) und erhalten:

$$A_1 (\varrho_1' + L \varrho_1)_{z=z_b} + A_2 (\varrho_2' + L \varrho_2)_{z=z_b} = 0 \quad \dots \quad (24).$$

In (21) und (24) haben wir nun zwei lineare homogene Gleichungen für A_1 und A_2, die nur lösbar sind, wenn die Determinante verschwindet:

$$\varrho_1'(-z_0) \cdot \varrho_2'(z_b) - \varrho_1'(z_b) \cdot \varrho_2'(-z_0) + L \cdot [\varrho_1'(-z_0) \cdot \varrho_2(z_b) - \varrho_1(z_b) \cdot \varrho_2'(-z_0)] = 0 \quad (25).$$

Dies ist eine Gleichung für die darin vorkommenden physikalischen Parameter α und c. Geben wir den reellen Parameter α, also die Wellenlänge der Störung, vor, so ist durch die Determinante (25) die Wellengeschwindigkeit bestimmt.

In dem Fall der von außen kommenden Störungen gelten außer (21) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_1 \varrho_1 + A_2 \varrho_2 &= B_1 e^{+Lz} + B_2 e^{-Lz} \\ A_1 \varrho_1' + A_2 \varrho_2' &= B_1 L e^{+Lz} - B_2 L e^{-Lz} \end{aligned}\right\} \text{für } z = z_b \quad \dots \quad (26) \text{ u. } (27),$$

so daß wir in (21), (26) und (27) drei Gleichungen für die vier Integrationskonstanten haben, welche nun nicht mehr eindeutig bestimmt werden können. Es sind daher in diesem Falle die Parameter α und c nicht mehr als Eigenwerte voneinander abhängig, sondern — innerhalb der Einschränkung (19) für c — willkürlich vorgebbar. Wir erhalten daher von außen kommende Störungen beliebiger Wellenlänge und Geschwindigkeit, deren Verhalten und besonders deren Reflexion an der Grenzschicht untersucht werden kann. Wir nennen sie die erzwungenen Schwingungen.

Mathematisch bietet der zweite Fall nach der Aufstellung der Integrale keine Schwierigkeiten mehr. α und c werden vorgegeben, und aus ϱ und ϱ' ergeben sich nach (5a) bis (6b) die Störungskomponenten. Dagegen gestaltet sich der erste Fall recht schwierig, da keinerlei Sätze über die Existenz von Eigenwerten aufgestellt werden konnten. Da uns insbesondere komplexe Eigenwerte als Anfachung oder Dämpfung hervorrufende interessieren, war unser Hauptaugenmerk darauf gerichtet, solche zu finden, was jedoch bisher nicht gelungen ist. Wir werden uns daher im folgenden nur mit reellen Eigenwerten befassen.

Zum Schluß müssen wir noch den Sonderfall $L = 0$ betrachten. Die Störungsgleichung (8) der äußeren Schicht vereinfacht sich jetzt zu $\varrho'' = 0$, hat also die Lösungen $\varrho = \text{const} = B$ und $\varrho = \text{const} \cdot z$. Die zweite Lösung ist wegen ihres Verhaltens im Unendlichen auszuschließen.

Als Randbedingungen bleiben wieder drei Gleichungen entsprechend (21), (22) und (23) für die drei Konstanten A_1, A_2 und B, so daß wir auch hier ein Eigenwertproblem vor uns haben. Die Wellengeschwindigkeit der Störung ist in diesem Falle allerdings von vornherein bestimmt, denn es ist $c_r = U_0 \pm a$. Eine Determinante entsprechend (25) liefert uns für jede Grundströmungsgeschwindigkeit die möglichen Wellenlängen der Störung, falls solche existieren. Rechnerisch erhalten wir diese Eigenschwingungen als Grenzlösungen $L \to 0$ des oben unter Fall I gekennzeichneten Eigenwertproblems. Physikalisch bedeuten sie stromauf oder stromab laufende Schallwellen, deren Front senkrecht zur Wand steht.

V. Freie Schwingungen (Eigenwertprobleme).

1. Aufstellung der allgemeinen Bedingungsgleichung für die Eigenwerte. Nach den Überlegungen des vorigen Kapitels stellt (25) eine Bedingungsgleichung für die Eigenwerte dar. Es wird zunächst unsere Aufgabe sein, diese einer Zahlenrechnung zugänglich zu machen. Wir benutzen als erstes die Integrale (15) und werden in einem späteren Abschnitt auch die asymptotischen Integrale heranziehen. In III, 5 konnte gezeigt werden, daß die Näherung bis zu den Gliedern mit $(U_0/a)^2$ für die Rechnung genau genug ist, wenn man sich auf αb-Werte unter 1 beschränkt. Diese Beschränkung müssen wir bei der Berechnung der Eigenwerte auf uns nehmen, da die Hinzunahme von höheren Gliedern in U_0/a einen überaus großen Rechenaufwand erfordern würde. Mit den Integralen (15) wird dann aus der Determinante (25):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha D = e^{+\alpha b} \cdot \Big\{ & -1.5\,(\alpha b)^2\,(c/U_0) + 1.5\,(\alpha b)^2\,(c/U_0)^2 \\
& + \left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \Big[\Big(1.875 - 1.875\,(\alpha b) + 0.375\,(\alpha b)^2 + 0,25\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0) \\
& + \Big(-1.875 + 1.875\,(\alpha b) - 1,125\,(\alpha b)^2 - (\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^2 \\
& + \Big(+1.5\,(\alpha b)^2 + 1,5\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0^3) + \Big(-0,75\,(\alpha b)^2 - 0,75\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^4\Big] \\
& + \frac{L}{a}\Big[\Big(1.5\,(\alpha b) - 1.5\,(\alpha b)^2\Big)(c/U_0) + 1.5\,(\alpha b)^2\,(c/U_0)^2 \\
& + \left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \cdot \Big[\Big(-\frac{1.875}{\alpha b} + 1.875 - 0,625\,(\alpha b)^2 + 0,25\,(\alpha b)^3\Big) c/U_0 \\
& + \Big(-1.875\,(\alpha b) + 1.875\,(\alpha b)^2 - (\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^2 \\
& + \Big(+1.5\,(\alpha b) - 1.5\,(\alpha b)^2 + 1.5\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^3 - 0,75\,(\alpha b)^3\,(c/U_0)^4\Big]\Big]\Big\} \\
+ e^{-\alpha b} \cdot \Big\{ & 1.5\,(\alpha b)^2\,(c/U_0) - 1.5\,(\alpha b)^2\,(c/U_0)^2 \\
& + \left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \Big[\Big(-1.875 - 1.875\,(\alpha b) - 0,375\,(\alpha b)^2 + 0,25\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0) \\
& + \Big(+1.875 + 1.875\,(\alpha b) + 1,125\,(\alpha b)^2 - (\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^2 \\
& + \Big(-1.5\,(\alpha b)^2 + 1.5\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^3 + \Big(+0,75\,(\alpha b)^2 - 0,75\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^4\Big] \\
& + \frac{L}{a} \cdot \Big[\Big(-1.5\,(\alpha b) - 1.5\,(\alpha b)^2\Big) c/U_0 + 1.5\,(\alpha b)^2\,(c/U_0)^2 \\
& + \left(\frac{U_0}{a}\right)^2 \Big[\Big(+\frac{1.875}{\alpha b} + 1.875 - 0,625\,(\alpha b)^2 - 0,25\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0) \\
& + \Big(+1.875\,(\alpha b) + 1.875\,(\alpha b)^2 + (\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^2 \\
& + \Big(-1.5\,(\alpha b) - 1.5\,(\alpha b)^2 - 1.5\,(\alpha b)^3\Big)(c/U_0)^3 + 0,75\,(\alpha b)^3\,(c/U_0)^4\Big]\Big]\Big\} = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (28).$$

Dieser Gleichung müssen sowohl die reellen wie auch die komplexen Eigenwerte, denen zeitlich angefachte oder gedämpfte Schwingungen entsprechen, genügen. Da es uns jedoch nicht gelungen ist, komplexe Eigenwerte zu finden, wird c im folgenden immer reell angenommen. Für eine Zahlenrechnung ist es vorteilhaft, die e-Funktionen in ihre Potenzreihen zu entwickeln.

2. Numerische Bestimmung der Eigenwerte. Bei der Bestimmung der Abhängigkeit der Eigenwerte voneinander liegt es nahe, zunächst einmal gleichsam als Probe zu zeigen, daß die von O. Tietjens (a. a. O.) erhaltenen bei uns für $U_0/a = 0$ auch herauskommen. Wir vernachlässigen daher in (28) alle Glieder, die U_0/a enthalten, den anderen gegenüber und können die Abhängigkeit $c = c(\alpha)$ oder $\beta = \beta(\alpha)$ explizit angeben:

$$\beta = \alpha U_0 - \frac{U_0}{2b}(1 - e^{-2\alpha b}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Tietjens durch direkte Lösung des entsprechenden inkompressiblen Problems gewonnenen überein.

Im kompressiblen Falle ist es jedoch unmöglich, die Abhängigkeit $c = c(\alpha)$ aus (28) explizit anzugeben. Um diese zu ermitteln, wählen wir zunächst in jedem Falle U_0/a fest und zeichnen dann nach (28) eine Kurvenschar $D(c)$ mit dem Parameter α. Die Gesamtheit aller Schnittpunkte dieser Kurven mit der Achse $D = 0$ gibt uns dann eine Kurve c in Abhängigkeit von α, deren Punkte bei dem gewählten U_0/a die Bedingungsgleichung (28) erfüllen, also die gesuchten Eigenwerte sind. Das Ergebnis ist in Abb. 4 aufgetragen. Wir sehen

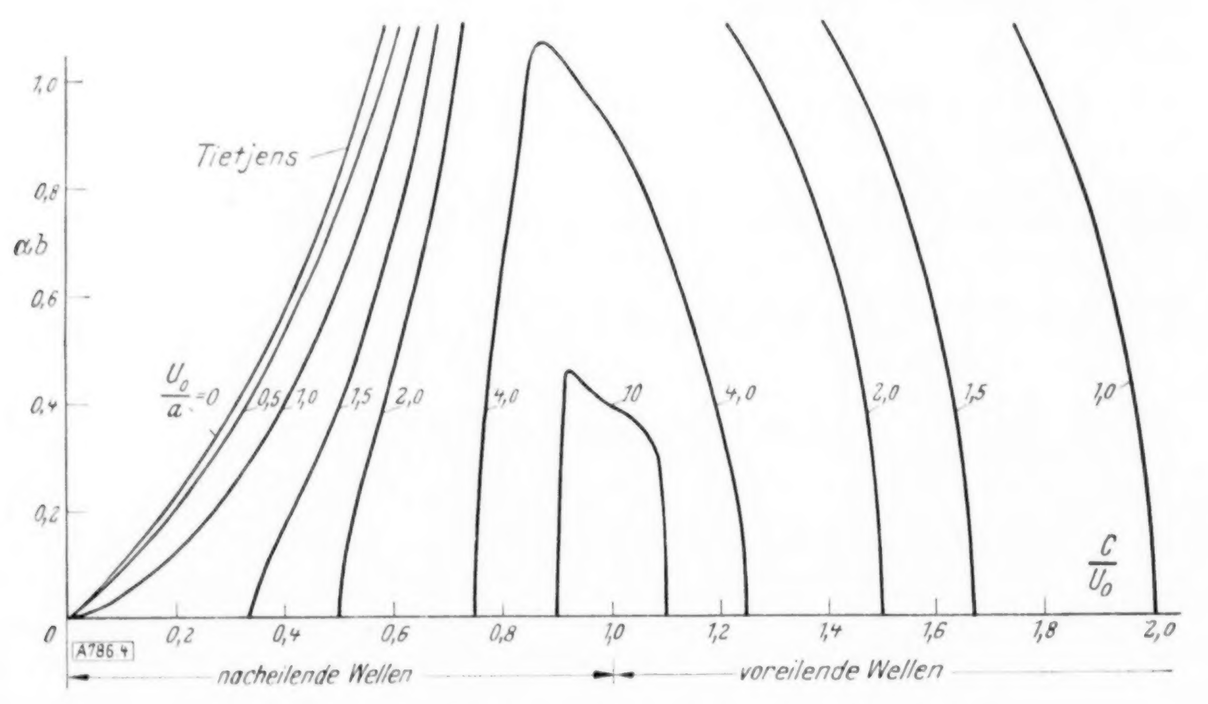


Abb. 4. Neutrale Eigenwerte bei kleineren Geschwindigkeiten.

aus ihr die gute Anlehnung an die Tietjenssche Kurve für $U_0/a = 0$ und wie sich für $U_0/a > 1$ die einschränkende Bedingung (18) bemerkbar macht. Alle Kurven, bei denen die Zusammendrückbarkeit berücksichtigt ist, gehen nicht bis zu unendlich großen Werten von α wie die Tietjenssche, sondern biegen um, so daß ein Maximalwert von α, also ein Minimum der Wellenlänge vorhanden ist, jenseits dessen keine Schwingungen mehr möglich sind.

Es sei noch bemerkt, daß außer den gezeichneten Werten auch $\alpha = 0$ bei beliebigem c und $c = 0$ bei beliebigem α für alle U_0/a die Gl. (28) erfüllen.

Um das Ergebnis zu veranschaulichen, haben wir ein Stromlinienbild für die speziellen Werte $U_0/a = 1{,}5$; $\alpha b = 0{,}5$ und $c/U_0 = 0{,}54$ gezeichnet (Abb. 5). Die Gleichungen für die Stromlinien erhielten wir nach der üblichen Methode zu

$$\Re e\left[-\left(\frac{a}{U_0}\right)^2 \frac{b\,\varrho_I'}{(\alpha b)^2 (y/b - c/U_0)} e^{i\alpha(x - ct)} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{b}\right)^2\right] = \text{const} = C_I \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

in der inneren Schicht und

$$\Re e\left[-\left(\frac{a}{U_0}\right)^2 \frac{b\,\varrho_{II}'}{(\alpha b)^2 (1 - c/U_0)} e^{i\alpha(x - ct)} + \frac{y}{b}\right] = \text{const} = C_{II} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

in der äußeren Schicht. Die freibleibende Integrationskonstante A_1 setzten wir aus Dimensionsgründen gleich $\alpha^2/10\,b$ und erreichten damit gleichzeitig, daß die bei der Aufstellung der Störungsgleichung (4) vorausgesetzte Bedingung, daß die Störungsbewegung klein gegenüber der Hauptbewegung ist, wenigstens näherungsweise erfüllt ist. Das Bild zeigt anschaulich die „Störungen in Wandnähe". Da es sich um zeitlich indifferente Schwingungen handelt, wird sich der gezeichnete Strömungszustand mit der Geschwindigkeit $c/U_0 = 0{,}54$ fortbewegen.

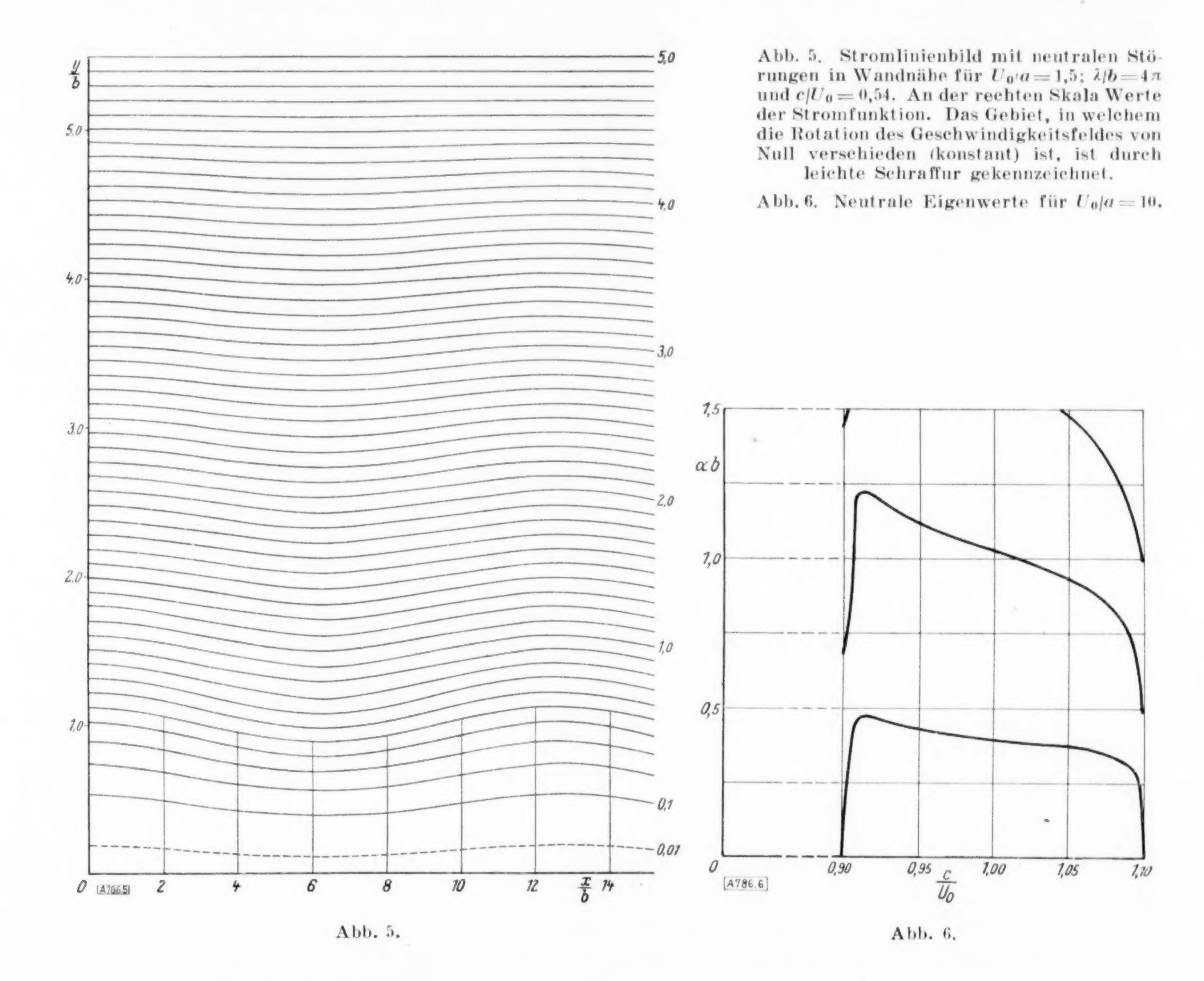


Abb. 5. Stromlinienbild mit neutralen Störungen in Wandnähe für $U_0/a = 1{,}5$; $\lambda/b = 4\pi$ und $c/U_0 = 0{,}54$. An der rechten Skala Werte der Stromfunktion. Das Gebiet, in welchem die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes von Null verschieden (konstant) ist, ist durch leichte Schraffur gekennzeichnet.

Abb. 6. Neutrale Eigenwerte für $U_0/a = 10$.

Abb. 5. Abb. 6.

3. Neutrale Eigenschwingungen für sehr große U_0/a. Wir berechnen nun die Eigenwerte, die bei sehr hohen Grundströmungsgeschwindigkeiten möglich sind, benutzen also für die ϱ-Funktionen der Determinante (25) die asymptotischen Integrale (17) aus III, 4. Gl. (25) besagt, daß folgende Beziehung bestehen muß:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{U_0}{a}\left(1-\frac{c}{U_0}\right)\cdot\left\{-J_{-1/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\cdot J_{+1/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[1-\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\right.\\ &\qquad\left.+J_{-1/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[1-\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\cdot J_{+1/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\right\}\\ &+\sqrt{1-\left(\frac{U_0}{a}\right)^2\left[1-\frac{c}{U_0}\right]^2}\cdot\left\{J_{-1/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\cdot J_{-3/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[1-\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\right.\\ &\qquad\left.+J_{+3/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[1-\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\cdot J_{+1/4}\left(\alpha b\frac{U_0}{2a}\left[\frac{c}{U_0}\right]^2\right)\right\}=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (32).$$

In dieser Gleichung ist der allen Gliedern gemeinsame Faktor

$$\frac{3.33}{a}(\alpha b)^3\,\frac{U_0}{a}\left(-\frac{c}{U_0}\right)^{5/2}\cdot\left(1-\frac{c}{U_0}\right)^{3/2}$$

fortgelassen. Wir benutzen nun diese Gleichung, welcher die reellen wie auch die komplexen Eigenwerte genügen müssen, um die Abhängigkeit etwa existierender reeller Eigenwerte voneinander festzustellen. Für die praktische Auswertung können wir die Tatsache heranziehen, daß U_0 groß gegen a sein muß. Da außerdem c reell sein soll, gilt die Ungleichung (18), welche für $U_0 \gg a$ aussagt, daß c/U_0 nahe an 1 liegen muß. Daher wird in den meisten Fällen (von Wichtigkeit für diese Entscheidung ist die Größe von αb) das in (32) auftretende Argument

$$\alpha b \frac{U_0}{2a}\left[1-\frac{c}{U_0}\right]^2$$

klein gegen 1 und das Argument

$$\alpha b \frac{U_0}{2a}\left[\frac{c}{U_0}\right]^2$$

groß gegen 1 sein, so daß wir dann für das erste Argument die Reihenentwicklungen und für das zweite Argument die asymptotischen Formeln der Besselschen Funktionen benutzen können. — Es zeigte sich bei der Durchführung der Rechnung, daß Eigenwerte existieren. In Abb. 6 ist für $U_0/a = 10$ die Funktion $c/U_0 = f(\alpha b)$ aufgetragen. Wir bemerken zunächst, daß zu jeder Wellengeschwindigkeit eine Vielzahl von Wellenlängen gehört. Mit wachsendem αb kommen immer neue Äste der Funktion $c/U_0 = f(\alpha b)$ hinzu. Jeder Ast weist einen Maximalwert von αb auf. — Die Endpunkte bei $c/U_0 = 0{,}9$ und $c/U_0 = 1{,}1$ (d. h. $c = U_0 \pm a$) gehören zu dem in IV behandelten Sonderfall $L = 0$ und sollen im nächsten Abschnitt genauer besprochen werden.

4. Eigenwerte, die längs der Wand laufende Schallwellen ergeben. Wie im vierten Kapitel gezeigt wurde, erhalten wir die Eigenwerte von mit ihrer Front senkrecht zur Wand laufenden Schallwellen als Grenzfälle $L \to 0$ der neutralen Eigenschwingungen. Wir erhalten sie also, wenn wir in den Gl. (28) und (32) $L = 0$ setzen. In Abb. 4 und 6 sind schon einige Werte eingetragen. Jedoch ist bei den in Abb. 4 gezeichneten immer $\alpha b = 0$. Es zeigt sich, daß auch bei den kleinen Geschwindigkeiten noch Eigenwerte $c = U_0 - a$ vorhanden sind, die augenscheinlich zu einem anderen „Ast" der Eigenwertkurven gehören (Abb. 7 und 7a). Diese

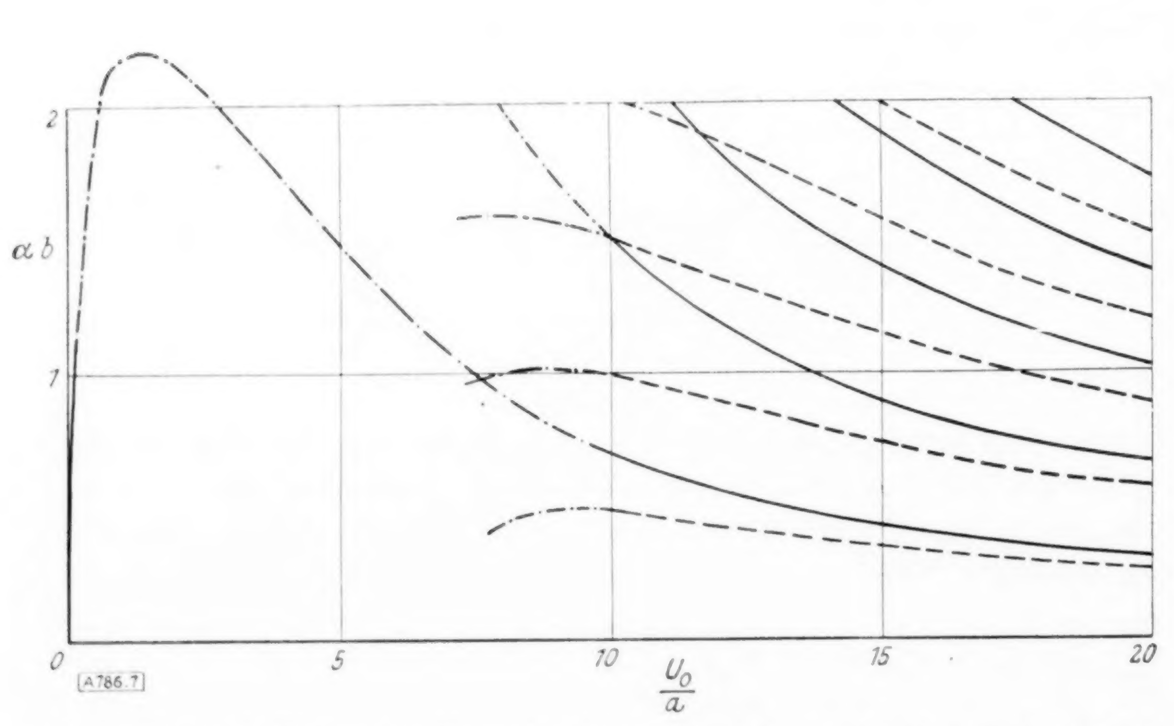


Abb. 7. Neutrale Eigenwerte für senkrecht zur Wand stromauf und stromab laufende Schallwellen abhängig von U_0/a. Ausgezogene Linien: Stromauf laufende Wellen ($c = U_0 - a$). Gestrichelte Linien: Stromab laufende Wellen ($c = U_0 + a$). Strichpunktiert: Vermutlicher Verlauf in dem der Rechnung nicht zugänglichen Gebiet.

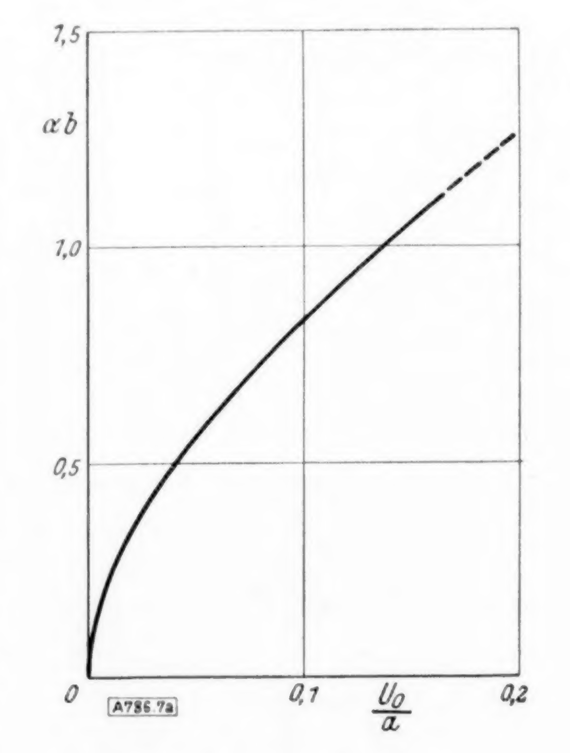


Abb. 7a. Der linke Teil von Abb. 7 in vergrößertem Maßstab.

Kurven konnten jedoch nicht weiter verfolgt werden, da ihre αb-Werte über 1 liegen, also in einem Gebiet, wo die Integrale (15) nicht mehr benutzt werden dürfen. Eigenwerte mit $c = U_0 + a$ konnten bei den kleinen Geschwindigkeiten nicht nachgewiesen werden. Bei den sehr großen Geschwindigkeiten sind sowohl Werte mit $c = U_0 - a$ als auch mit $c = U_0 + a$ vorhanden.

Um diese senkrecht zur Wand stromauf und stromab laufenden bis ins Unendliche reichenden Schallwellen zu veranschaulichen, haben wir Längs- und Querkomponente der Störung für $U_0/a = 10$, $c/U_0 = 0{,}9$ und drei verschiedene αb in Abb. 8 aufgetragen. In der äußeren Schicht sind u und v wegen $\varrho_{II} = B$, welches wir zu Null angenommen haben, und

(6b) gleich Null, in der inneren Schicht vollführen sie Schwingungen und an der Wand ist v den Randbedingungen entsprechend gleich Null. Dem linken Ast und dem untersten der Kurvenschar ($U_0/a = 10$) in Abb. 7 entspricht eine Schwingung mit einem Knoten, während für jeden folgenden Ast der Kurvenschar ein Knotenpunkt hinzukommt.

Es besteht die Möglichkeit, daß auch bei kleinen U_0/a und größeren ab-Werten noch neue Kurvenäste hinzukommen, die dann über das unbekannte Zwischengebiet hinweg mit den Ästen einer Schar der asymptotischen Lösungen verbunden werden könnten, wie das bei dem untersten Ast schon geschehen ist (Abb. 7).

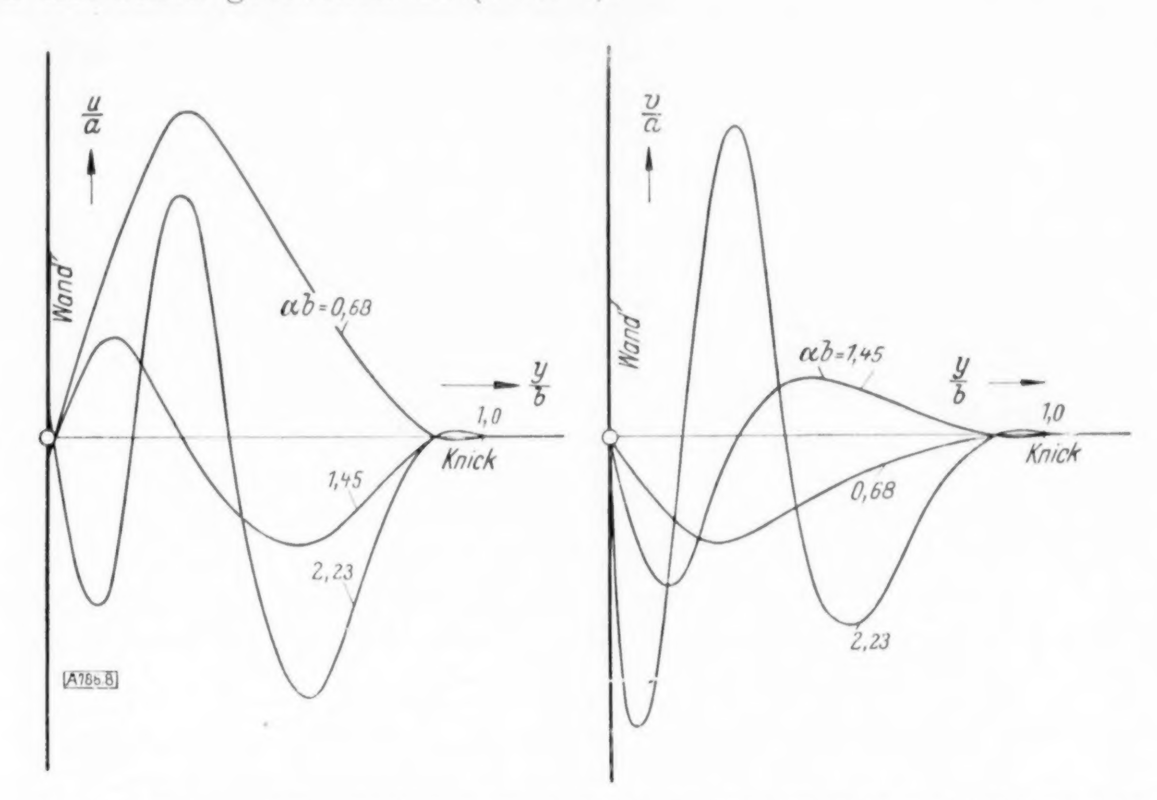


Abb. 8. Längs- und Querkomponenten der Störung für senkrecht zur Wand stromab laufende Schallwellen. $U_0/a = 10$, $c/U_0 = 0,9$ und drei Werte von ab.

Damit sind die berechneten Eigenwerte angegeben. Es handelt sich in allen Fällen um ungedämpfte und nichtangefachte Schwingungen. Bis auf diejenigen dieses letzten Abschnitts nimmt die Schwingungsamplitude mit der Entfernung von der Wand ab. Irgendeine Ursache für die Entstehung der Turbulenz bei kompressiblen Grenzschichtströmungen läßt sich aus diesen Ergebnissen nicht herleiten.

VI. Erzwungene Schwingungen.

Wir behandeln nun den Fall II des dritten Kapitels, also schräg von außen kommende Wellen, die in der Grenzschicht reflektiert werden. Der Winkel φ, welchen die Wellennormale mit der Wand bildet, ist durch

$$c_r = U_0 - \frac{a}{\cos\varphi} \qquad (20)$$

gegeben, so daß c_r in dem durch (19) bestimmten Bereich liegt. c_i wollen wir auch jetzt immer gleich Null setzen. Wir können also den Winkel φ, U_0/a und die Wellenlänge vorgeben und aus den Integralen (15) und den Formeln (5a) bis (6b) die Störung aufbauen. Zur Veranschaulichung kann das Bild der Stromlinien der aus Grundströmung und Störung zusammengesetzten Strömung gezeichnet werden. Die Gleichungen der Stromlinien sind durch (30) und (31) gegeben. Die Integrationskonstanten müssen so ausgewählt werden, daß die Gl. (21), (26) und (27) (Randbedingungen) erfüllt sind.

In Abb. 9 ist ein solches Stromlinienbild für die speziellen Zahlenwerte $U_0/a = 1,5$; $c_r = 0$ gezeichnet. Die Strömung ist also stationär. Damit ist nach (20) $\varphi = 48,2°$; ab sei gleich 1 gesetzt, so daß $\lambda/b = 2\pi$ ist. Die freibleibende Integrationskonstante setzen wir wieder gleich $a^2/10\,b$.

Wir können so gut Vergleiche mit der Abb. 5 ziehen, wo für dieselbe Grundströmungsgeschwindigkeit ein Stromlinienbild mit Störungen in Wandnähe, also Eigenwerten gezeichnet war. Im Gegensatz zu jener Strömung erfüllt die Störung jetzt den ganzen Außenraum. Es werden Wellen unter einem Winkel von 48,2° eingestrahlt und wieder ausgestrahlt. Die allerdings genau nur für sehr kleine Störungen konstruierten Machschen Wellen sind mit

eingezeichnet. Die Abbildung läßt erkennen, daß die Wellen durch die Anwesenheit der Grenzschicht nicht von der Wand selbst reflektiert werden. Die „ideelle Reflektionsebene", die dadurch gekennzeichnet sei, daß die nicht abgelenkten geraden Wellen an ihr reflektiert würden, liegt in unserem Falle in einem Abstand $y/b = 0{,}82$ von der Wand entfernt, wie zeichnerisch ermittelt wurde. Das in diesem Falle in einigen Gebieten nahe der Wand auftretende Gebiet mit Rückströmung ist in Abb. 5 auch vorhanden, jedoch in so geringem Maße, daß es nicht gezeichnet werden konnte.

Nach der dargelegten Methode ist es möglich, allgemein das Verhalten von eingestrahlten Wellen in der Grenzschicht einer kompressiblen Flüssigkeit zu untersuchen, wenn es erlaubt ist, die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht selbst durch die hier vorausgesetzte zu ersetzen.

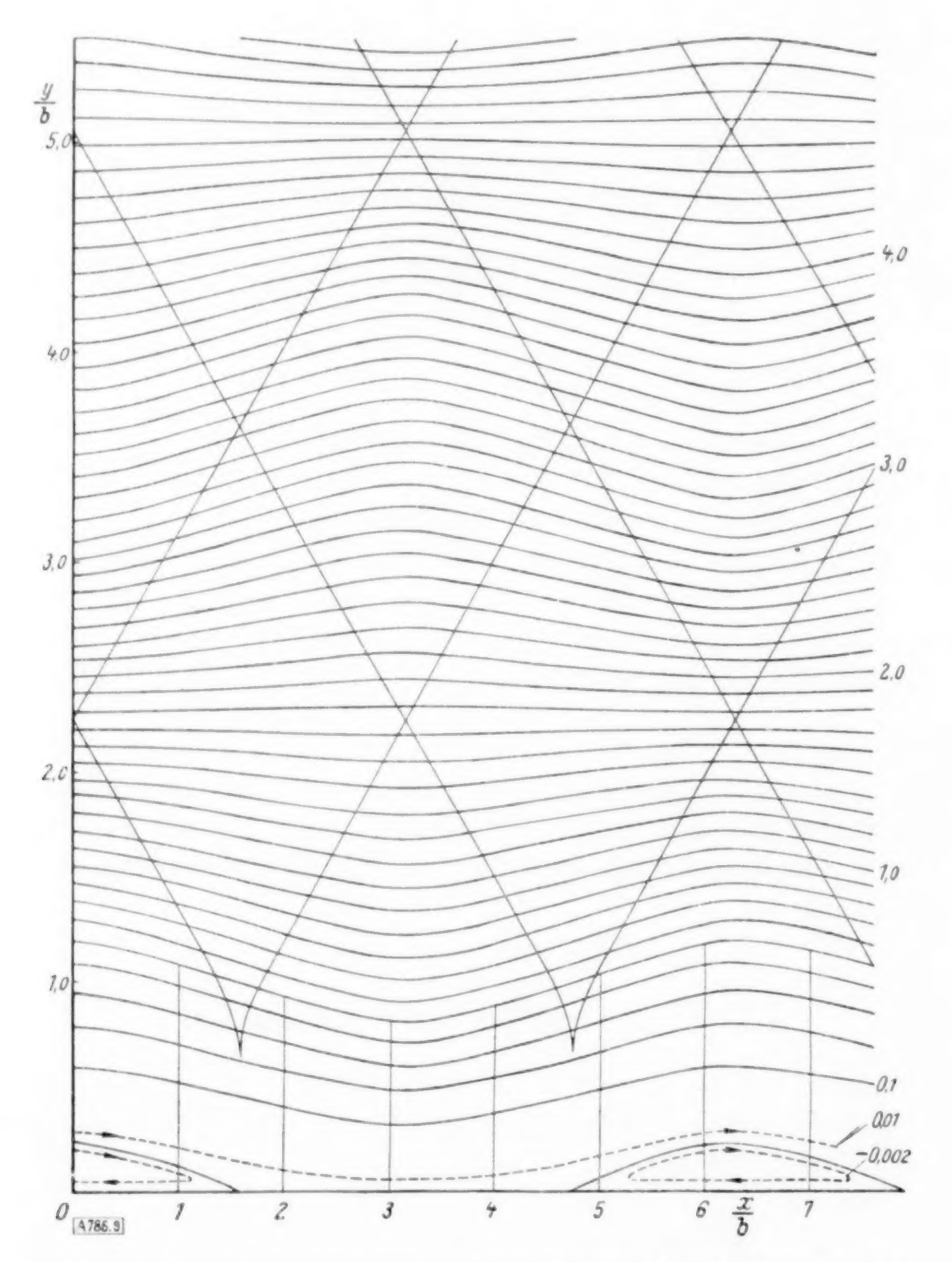


Abb. 9. Stromlinienbild mit von außen kommenden Störungen für $U_0/a = 1{,}5$ und $\lambda/b = 2\pi$. An der rechten Skala Werte der Stromfunktion. Leichte Schraffur bezeichnet wie in Abb. 5 das Gebiet, in welchem die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes von Null verschieden (konstant) ist.

VII. Zusammenfassung.

Es wurden die kleinen Störungen einer ebenen, reibungslosen, kompressiblen Grenzschichtströmung einfachster Art nach der Methode der kleinen Schwingungen untersucht. Nach Integration der Störungsgleichung wurden die beiden Hauptfragen erörtert: Erstens die freien Schwingungen in Wandnähe und zweitens die von außen kommenden erzwungenen Schwingungen. Das Stabilitätsproblem lieferte indifferente Eigenschwingungen. Die Reflexion der für die kompressible Strömung charakteristischen im allgemeinen schrägen Störungswellen in der Grenzschicht wurde untersucht. Stromlinienbilder für beide Arten von Störungen dienten der Veranschaulichung der Untersuchungen.

Meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. L. Prandtl sowie Herrn Dozenten Dr. W. Tollmien bin ich für die Anregung und für unermüdlichen Rat bei der Abfassung der Arbeit sehr dankbar. 786

Note on the motion of an infinite elliptic cylinder in fluids having a constant shear motion.

by *Manohar Ray*, Lahore, India.

Zusammenfassung. Ein unendlich langer Zylinder mit elliptischem Querschnitt kann in einer ebenen Scherströmung eine freie Bewegung ausführen, wenn er sich mit einer vom Achsenverhältnis abhängigen konstanten Geschwindigkeit (Gl. (4)) um seine Achse dreht, und wenn sich diese selbst parallel der Scherrichtung mit der gleichförmigen Geschwindigkeit der ungestörten Strömung bewegt. Um diese Rotationsgeschwindigkeit und ihre Beziehung zu anderen Umdrehungsgeschwindigkeiten in ihrer Abhängigkeit vom Achsenverhältnis des Zylinders zu untersuchen, wird die Momentengleichung (2) numerisch integriert. Es ergibt sich, daß die erwähnte freie Bewegung instabil ist und daß die zugehörige Rotation in dem Sinne eine Grenze darstellt, daß für keinen Bewegungstyp die Rotation diese Grenze überschreiten kann.

1. Introduction. If an infinite elliptic cylinder is moving in a liquid having a uniform shear motion parallel to a fixed direction, it can be shown[1] that free motion of the cylinder is possible when it has a unique rotation about its axis and its centre moves parallel to the line of shear with the uniform velocity of the liquid particle it displaces. The object of the present note is to study the unique rotational velocity and its relation to other rotations which the cylinder may possess specially as the flatness of the cylinder changes. The general moment equation has been solved numerically. The numerical result shows that the free motion with unique rotation is unstable and this unique rotational velocity acts as a limit in the sense that in any type of motion the rotation cannot cross this limit either way. The maximum couples for different flatnesses and rotational velocities of the cylinders have been tabulated.

2. The equations. We first write down the formulae which lead to the moment equation which has been numerically integrated.

Consider a two dimensional liquid motion with constant vorticity ζ. If (x_0, y_0) be the co-ordinates of the centre C of an elliptic section moving in it, referred to two fixed axes $O X_0$, $O Y_0$, Θ the angle the major axis of the elliptic section makes with $O X_0$ at any time t, $(x\, y)$ the co-ordinates of any point P referred to the axes of the elliptic section, ψ the stream function, Φ a function defined by the condition $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi + i\,\psi) = f(x + i\,y)$, then the pressure integral will be given by[2])

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\ddot{x}_0 \cos\Theta + \ddot{y}_0 \sin\Theta)\, x - (\ddot{y}_0 \cos\Theta - \ddot{x}_0 \sin\Theta)\, y - \frac{1}{2} q^2 + \zeta\,\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}\zeta\,\dot{\Theta}\,(x^2 + y^2) + \dot{\Theta}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1),$$

q being the velocity.

This pressure integral can be used to find the resultant force and the couple due to the liquid pressure acting on the cylinder. The next step in the solution is the determination of the stream-function ψ and this can be easily done by introducing the elliptic coordinates given by the substitution, $x + i\,y = c\cosh(\xi + i\,\eta)$. If $2\,\widehat{\omega}$ is the constant vorticity of the undisturbed laminar motion parallel to $O X_0$, the stream function for the disturbed motion relative to the moving point C, when $\xi = \xi_0$ gives the elliptic boundary of the cross-section of the cylinder, is

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4}\,\widehat{\omega}\,c^2 \{\cosh 2\,\xi + \cos 2\,\eta - e^{2(\xi_0 - \xi)} \cos 2\,\eta\} - \frac{1}{4}\,\widehat{\omega}\,c^2 \cos 2\,\Theta \\ &\quad - \frac{1}{4}\,\widehat{\omega}\,c^2 \cos 2\,\Theta\,\{\cosh 2\,\xi - \cosh 2\,\xi_0\, e^{2(\xi_0 - \xi)}\} \cos 2\,\eta \\ &\quad + \frac{1}{4}\,\widehat{\omega}\,c^2 \sin 2\,\Theta\,\{\sinh 2\,\xi - \sinh 2\,\xi_0\, e^{2(\xi_0 - \xi)}\} \sin 2\,\eta \\ &\quad + c\,(\dot{x}_0 \cos\Theta + \dot{y}_0 \sin\Theta + 2\,\widehat{\omega}\,y_0 \cos\Theta)(\sinh\xi - \sinh\xi_0\, e^{\xi_0 - \xi}) \sin\eta \\ &\quad + c\,(\dot{x}_0 \sin\Theta - \dot{y}_0 \cos\Theta + 2\,\widehat{\omega}\,y_0 \sin\Theta)(\cosh\xi - \cosh\xi_0\, e^{\xi_0 - \xi}) \cos\eta \\ &\quad + \frac{1}{4}\,c^2\,\dot{\Theta}\, e^{2(\xi_0 - \xi)} \cos 2\,\eta\,, \end{aligned}$$

[1]) Ray: Proc. Roy. Soc. A. vol. 158, p. 522 (1937).
[2]) l. c. Eq. (14). p. 525.

for this satisfies $\nabla^2 \psi = 2\bar{\omega}$ at every point of the liquid, gives the angular velocity $\dot{\Theta}$ on the boundary $\xi = \xi_0$ of the elliptic section and agrees with the correct value of the stream function for the undisturbed motion found at a great distance from the cylinder.

The component-forces parallel to the axes of the elliptic section, which act on the cylinder due to fluid pressure, are given by

$$F_1 = -\int p\, l\, d s\,, \qquad F_2 = -\int p\, m\, d s\,,$$

and the couple tending to rotate the cylinder is

$$G = \int (p\, l\, y - p\, m\, x)\, d s\,,$$

where all the integrals are taken round the transverse section, (l, m) being the direction-cosines of the outward normal.

Next finding the force-components parallel to OX_0, OY_0, we can easily write down the equations of motion of the cylinder and the couple equation. These equations are too complicated for general integration and are much simplified if we consider the case of free motion when the motion of the centre of the elliptic section is the same as that of the liquid particle it displaces. The moment equation[3]) then takes the form

$$\left\{\varrho' (a^2 + b^2)\, a\, b + \frac{1}{2}\, \varrho\, (a^2 - b^2)^2\right\} \ddot{\Theta} = -\varrho\, \bar{\omega}\, (a^2 - b^2) \sin 2\Theta \{2(a-b)(a+3b)\dot{\Theta} - \bar{\omega}(a+b)^2\} \quad (2),$$

where ϱ' is the density of the cylinder.

The couple constituent G of the resultant liquid pressure is in fact given by

$$G = -\frac{\pi}{4}\, \varrho \left[\frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2\, \ddot{\Theta} + \bar{\omega}\,(a^2 - b^2) \sin 2\Theta \{2(a-b)(a+3b)\dot{\Theta} - \bar{\omega}(a+b)^2\}\right]. \quad (3).$$

Equation (2) has a solution[4]), in addition to $\Theta = 0$,

$$\dot{\Theta}_c = \text{constant} = \frac{\bar{\omega}\,(a+b)^2}{2\,(a-b)\,(a+3b)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Thus free motion of the cylinder is possible parallel to the line of shear, with the centre of the elliptic section having the uniform velocity of the undisturbed liquid and the cylinder having constant angular rotation about the axis of amount given by (4). It should be noticed that this unique rotation which depends on the flatness of the cylinder has no limit as $b/a \to 1$. The meaning will be clear from the results which follow:

Table I.

$b/a =$	·05	·2	·5	·6	·7	·8	·9	1·0
$\dot{\Theta}_c =$	·5046	·5625	·9	1·1429	1·543	2·3824	4·878	∞

Table II.

Θ	$(\dot{\Theta})_{b/a = \cdot 2}$		
0	·2	·5	·6
·1	·2427	·5034	·5983
·2	·3231	·5119	·5937
·5	·4921	·5441	·575
1·0	·5567	·5608	·5637
1·6	·56117	·56215	·56281
1·7	·56101	·562124	·562838
1·8	·56072	·562053	·5629
2·0	·55925	·56168	·563
2·4	·54147	·5574	
3·0	·26005	.516	

[3]) l. c. Eq. (35c), p. 531.
[4]) l. c. Eq. (37), p. 531.

Table III.

Θ	$(G/\varrho\, a^4)_{\dot\Theta_0 = \cdot 3}$ for $b/a = \cdot 05$	for $b/a = \cdot 2$	for $b/a = \cdot 5$	for $b/a = \cdot 6$	for $b/a = \cdot 7$	for $b/a = \cdot 8$	for $b/a = \cdot 9$
0	0	0	0	0	0	0	0
·1	·0104	·0437	·1386	·1644	·1718	·1575	·1003
·2	·0149	·0675	·2437	·2998	·3226	·3021	·1947
·3	·01394	·0702	·3064	·3961	·4435	·4274	·2803
·4		·0596	·329	·4507	·5277	·5253	·3517
·5		·0449	·3262	·4785	·584	·6018	·4116
·6				·4724	·6061	·6465	·4519
·7					·6011	·6632	·4736
·8						·6544	·4766
·9							·4609

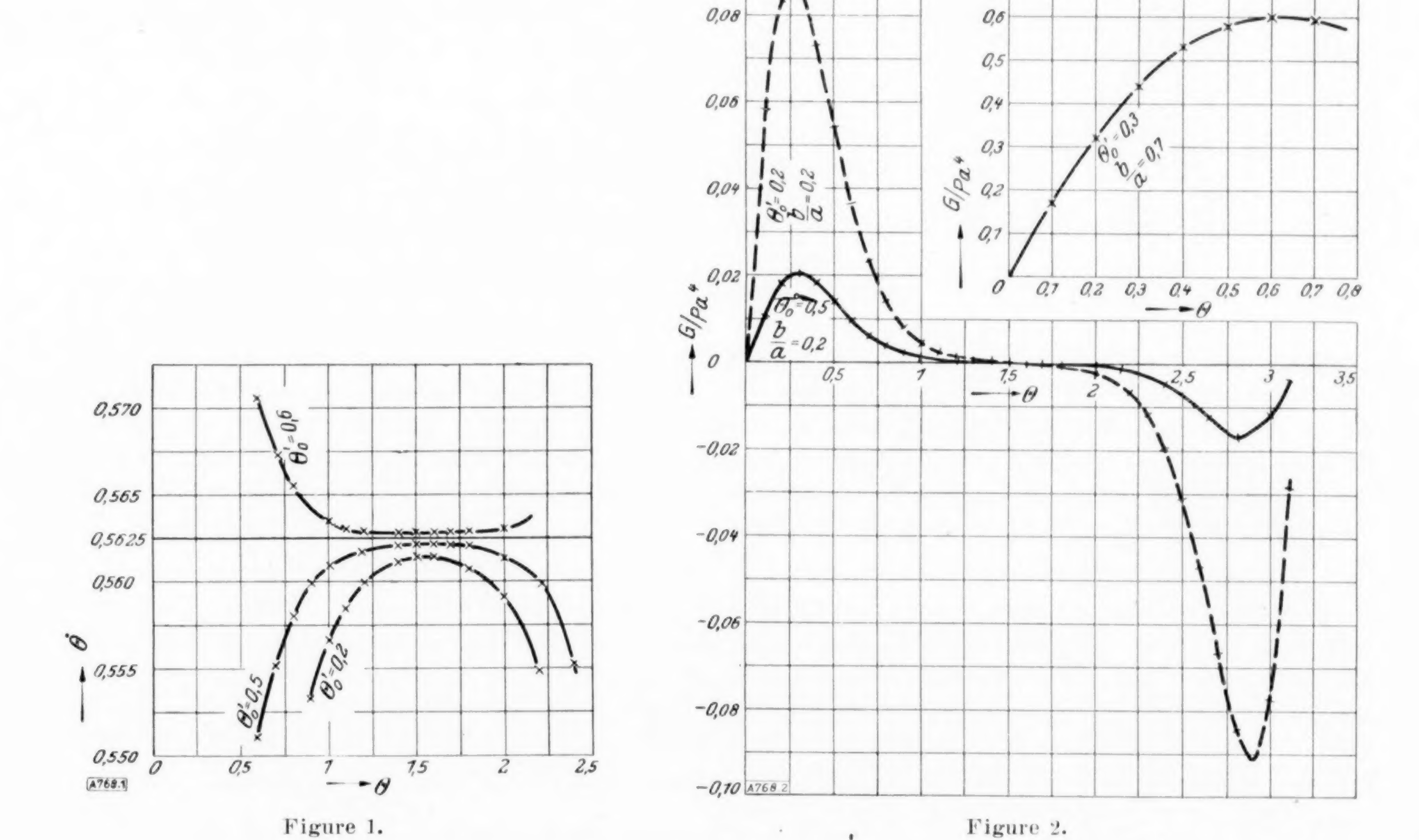


Figure 1. Figure 2.

3. Results. Equation (2) has been solved numerically for $\varrho/\varrho' = \cdot 5$ and $\bar\omega = 1$ (the specific density of the cylinder is $\frac{\varrho'}{\varrho}$ and the angular velocities are measured in terms of the rotation $\bar\omega$).

Firstly, the critical rotational velocity $\dot\Theta_c/\bar\omega$ has been tabulated for different values of b/a i. e. ‚roundness' of the cylinder, (see Table I).

Secondly, for a given value of b/a, $\dot\Theta$ has been calculated for different values of Θ, taking initially at $\Theta = 0$ different values for $\dot\Theta_0$. It is found that if this initial value is less than $\dot\Theta_c$, the subsequent values of $\dot\Theta$ increase to a maximum which is always less than $\dot\Theta_c$ and then decrease. Similarly, for initial values greater than $\dot\Theta_c$, the subsequent values of $\dot\Theta$ first decrease to a minimum $> \dot\Theta_c$ and then increase. The reason for intial decrease in the latter case is due to the fact that the couple changes sign at $\dot\Theta_c$. Table II shows this for $b/a = \cdot 2$ and in figure 1 the portions of the curves near the critical line $\dot\Theta = \dot\Theta_c$ have been shown. The unique rotational velocity sharply devides the velocity curves into two classes, and is a limit which no particular motion may cross either way. This clearly shows that free motion with critical angular velocity is unstable.

Thirdly, after (2) has been solved the values of $G/\varrho a^4$ are calculated from (3). The variation of $G/\varrho a^4$ is shewn in certain typical curves in figure 2. On each curve there is a maximum on either side. Calculations for different values of $\dot{\Theta}_0$ and a fixed value of b/a show that the maxima of $G/\varrho a^4$ occur very nearly for the same value of Θ so long as $\dot{\Theta}_0$ ($\dot{\Theta}_0 < \dot{\Theta}_c$) is not very close tho the critical value $\dot{\Theta}_c$. It is only in this latter case that the maxima shift slightly towards a greater Θ. For $\dot{\Theta}_0 > \dot{\Theta}_c$ the above statement also remains true except that the sign of the couple is changed. It has been found that for values of b/a up to about ·4, the forward deflection of the maxima happens only when $\dot{\Theta}_0$ is very close to $\dot{\Theta}_c$ corresponding to the value of b/a taken, and as b/a increases further (i. e. the more does the cylinder become round) the forward deflection occurs earlier and becomes more pronounced.

Fourthly, keeping $\dot{\Theta}_0$ fixed, the values of $G/\varrho a^4$ for different values of b/a have been calculated. One such result for $\dot{\Theta}_0 = {\cdot}3$ is exhibited in Table III. The maximum value of $G/\varrho a^4$ for a particular b/a has been underlined. The table shows how the positions of the maxima are shifted towards greater values of Θ with increasing b/a. Moreover the numerical values of these maxima have a maximum for a definite b/a. For instance, Table III shows that for $\dot{\Theta}_0 = {\cdot}3$ the maximum $G/\varrho a^4$ for varying b/a occurs for the cylinder in which b/a is very nearly ·8.

In conclusion I want to thank Prof. N. R. Sen of the Calcutta University for kind help in this work. 768

Über ein nichtlineares Problem der Plattenstatik.

(Kreisplatte und Parallelstreifen auf unnachgiebiger Unterlage)

Von *Rudolf Hofmann* in Aachen (dzt. Sterkrade).

Einleitung. Folgende Untersuchung soll ein Beitrag zur Klärung der Spannungs- und Verformungsverhältnisse sein, wie sie z. B. an Rotationsschalen mit ebener, auf unnachgiebiger Unterlage ruhender Bodenplatte bei innerem Flüssigkeitsdruck auftreten. Ist die Mantelschale an der Basis unverdrehbar eingespannt oder vollkommen gelenkig gelagert, dann können mit verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand Spannungen und Verformungen ermittelt werden[1]. Im folgenden soll der Fall untersucht werden, daß die Mantelschale tangententreu an eine elastisch nachgiebige Bodenplatte angeschlossen ist.

Kreisplatte. Denkt man sich Boden und Mantel getrennt und an der Verbindungsnaht die Schnittkräfte angebracht, so kann der Boden als Kreisplatte auf unnachgiebiger Unterlage aufgefaßt werden. Die Platte trägt dann eine gleichförmige Flächenlast p (Flüssigkeitsdruck) und ist längs ihres Umfangs mit dem von der Mantelschale herrührenden Radialmoment M_a je Längeneinheit des Umfangs belastet. Infolge dieses Momentes wird sich längs des Randes ein Kreisring von der Breite L von seiner Unterlage abheben (Abb. 1). Der innere Teil der Platte liegt noch satt auf seiner Unterlage auf.

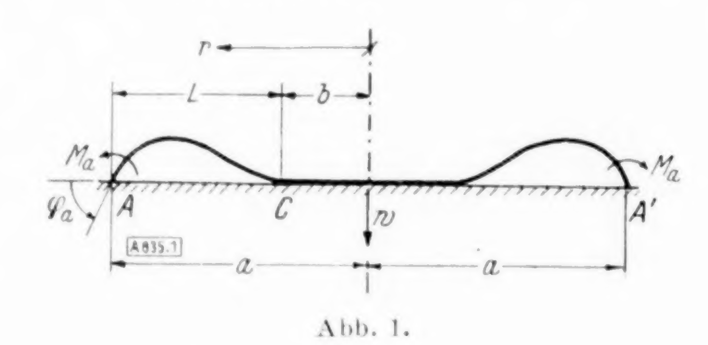


Abb. 1.

Die Plattengleichung $\Delta\Delta w = \frac{p}{B}$ hat in Polarkoordinaten die Form[2])

$$\frac{d^4 w}{d r^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{d r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d w}{d r} = \frac{p}{B}.$$

p ... Belastung je Flächeneinheit, B ... Plattensteifheit $\left(B = \frac{E d^3}{12(1-\nu^2)}\right)$, d ... Plattendicke, E ... Elastizitätszahl, ν ... Querzahl. An Stelle der partiellen Ableitungen sind die totalen

[1]) Vgl. z. B. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, S. 130 ff.
[2]) Auerbach-Hort: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, 3. Bd., S. 150 ff. a. a. O.

gesetzt, da bei Kreissymmetrie die Ordinate w vom Zentriwinkel unabhängig ist. Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet:

$$w = A_1 + A_2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 r^2 \ln r + \frac{p\, r^4}{64\, B}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten A_1 bis A_4 und der unbekannten Größe b stehen uns folgende fünf Randbedingungen zur Verfügung:

$$1.\; r = b \ldots\ldots w = 0, \qquad 4.\; r = a \ldots\ldots G_1 = -M_a,$$
$$2.\; r = a \ldots\ldots w = 0, \qquad 5.\; r = b \ldots\ldots \frac{dw}{dr} = 0.$$
$$3.\; r = b \ldots\ldots G_1 = 0,$$

G_1 ist das Biegemoment in radialer Richtung.

Diese Bedingungen liefern folgende 5 Gleichungen:

$$A_1 + A_2 \ln b + A_3 b^2 + A_4 b^2 \ln b = -\frac{p\, b^4}{64\, B} \quad \ldots\ldots (1),$$

$$A_1 + A_2 \ln a + A_3 a^2 + A_4 a^2 \ln a = -\frac{p\, a^4}{64\, B} \quad \ldots\ldots (2),$$

$$A_2 \frac{\nu - 1}{b^2} + A_3\, 2(\nu + 1) + A_4 (3 + 2 \ln b + 2 \nu \ln b + \nu) = -\frac{p\, b^2}{16\, B}(3 + \nu) \quad \ldots\ldots (3),$$

$$A_2 \frac{\nu - 1}{a^2} + A_3\, 2(\nu + 1) + A_4 (3 + 2 \ln a + 2 \nu \ln a + \nu) = -\frac{p\, a^2}{16\, B}(3 + \nu) + \frac{M_a}{B} \quad \ldots (4),$$

$$\frac{A_2}{b} + A_3\, 2\, b + A_4\, b\, (2 \ln b + 1) = -\frac{p\, b^3}{16\, B} \quad \ldots\ldots (5).$$

Zur Vereinfachung der numerischen Rechnung wollen wir im folgenden die Querdehnung vernachlässigen ($\nu = 0$).

Eliminieren wir aus diesem Gleichungssystem die Konstanten A_1 bis A_4, so erhalten wir eine Gleichung zwischen der Unbekannten b/a einerseits und den Belastungsgrößen und Abmessungen andrerseits. Für einen bestimmten Belastungsfall können wir also b/a daraus ermitteln. Eine explizite Darstellung von b/a aus dieser transzendenten Gleichung ist allerdings nicht möglich. Wir wenden deshalb ein graphisches Lösungsverfahren an. Die Gleichung hat die Form

$$M_a = \frac{p\, a^2}{32} \cdot c \quad \ldots\ldots (6),$$

worin c eine Funktion von b/a ist. Und zwar hat c folgende Werte:

Zahlentafel I.

b/a	0,96	0,94	0,92	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,30	0,10	0,01	10^{-6}
c	0,013	0,028	0,049	0,078	0,168	0,293	0,446	0,626	0,833	1,058	1,303	1,565	2,747	3,947	4,584	4,883

Aus Gl. (6) läßt sich bei gegebener Belastung (M_a und p) und Abmessung a das c berechnen. Aus Zahlentafel I bzw. aus einer graphischen Darstellung $c = c(b/a)$ findet man den dazugehörenden Wert b/a. Damit kann man die vier Integrationskonstanten A ermitteln, wofür man zweckmäßigerweise wieder eine graphische Darstellung $A = A(b/a)$ oder $A = A(c)$ verwenden wird. Wir sind jetzt in der Lage, bei gegebener Belastung die elastische Fläche der Platte, mithin auch die auftretenden Spannungen zu bestimmen.

Soll mit der Kreisplatte ein anderes Bauglied biegungssteif verbunden sein, so interessiert uns vor allem die Beziehung zwischen dem Randmoment M_a und der Verdrehung der Randtangente. Denn an der Verbindungsnaht der beiden Bauglieder müssen bei tangententreuem Anschluß Moment und Winkelverdrehung beider übereinstimmen.

Die Winkelverdrehung $\frac{dw}{dr}$ für $r = a$, die wir mit φ_a bezeichnen wollen, hat den Wert

$$\varphi_a = \frac{A_2}{a} + 2\, a\, A_3 + A_4\, a\, (2 \ln a + 1) + \frac{p\, a^3}{16\, B}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte A als Funktion von b/a ein, so läßt sie sich in der Form schreiben:

$$\frac{B\, \varphi_a}{a} = \frac{p\, a^2}{32} \cdot f \quad \ldots\ldots (7).$$

Darin ist f eine Funktion von b/a. Die Zahlenwerte enthält folgende Zusammenstellung:

Zahlentafel II.

b/a	0,96	0,94	0,92	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70
f	0,00009	0,00028	0,00066	0,0013	0,0043	0,010	0,019	0,033
b/a	0,65	0,60	0,55	0,50	0,30	0,10	0,01	10^{-6}
f	0,051	0,074	0,104	0,139	0,353	0,659	0,862	0,961

Durch Eliminieren von b/a aus den beiden Gleichungen $c = c(b/a)$ (Zahlentafel I) und $f = f(b/a)$ (Zahlentafel II) erhält man die Gleichung $f = f(c)$. Da

$$M_a = \frac{p\,a^2}{32} \cdot c \qquad \text{und} \qquad \frac{B\,\varphi_a}{a} = \frac{p\,a^2}{32} \cdot f,$$

so hat man damit gleichzeitig eine Beziehung zwischen dem Randmoment M_a und der Verdrehung der Randtangente φ_a. Diese Beziehung ist in Abb. 2 dargestellt.

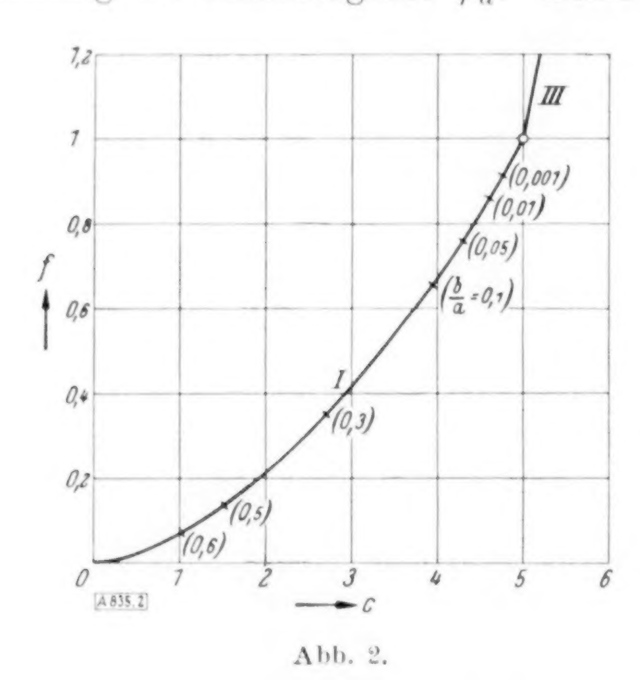


Abb. 2.

Abb. 3.

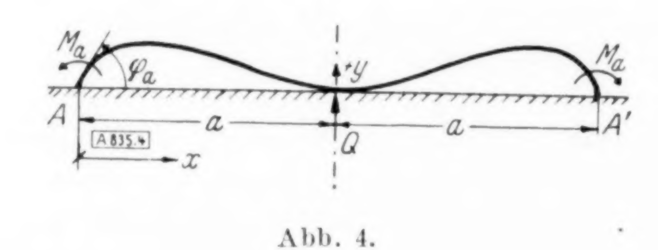


Abb. 4.

Hat b/a den Wert null erreicht, so hebt sich die ganze Platte ab. Da Durchbiegung und Moment im Punkte $r = 0$ endlich sind, lautet die Gleichung der elastischen Fläche dann

$$w = A_1 + A_3\,r^2 + \frac{p\,r^4}{64\,B}.$$

Daraus folgt

$$G_{1\,a} = -B \left.\frac{d^2 w}{d r^2}\right|_{r=a} = -2\,A_3\,B - \frac{3\,p\,a^2}{16}; \qquad \left.\frac{d\,w}{d\,r}\right|_{r=a} = \varphi_a = 2\,A_3\,a + \frac{p\,a^3}{16\,B}$$

und mit

$$G_{1\,a} = -M_a \qquad \text{ergibt sich weiter} \qquad \frac{B\,\varphi_a}{a} = M_a - \frac{p\,a^2}{8}.$$

An der Übergangsstelle vom linearen zum nichtlinearen Bereich hat die f-c-Linie eine Unstetigkeit in der Tangente. Da wir die Kurve des nichtlinearen Bereiches nur punktweise bzw. graphisch ermittelt haben, wollen wir untersuchen, ob diese Unstetigkeit in ähnlichen Fällen, die sich analytisch behandeln lassen, auch auftritt.

Parallelstreifen. Wir untersuchen zu diesem Zweck eine Platte von der Breite $2a$ und unbegrenzter Länge, welche auf unnachgiebiger Unterlage ruht, die gleichförmige Flächenlast p trägt und an beiden Rändern mit dem Biegemoment M_a je Längeneinheit belastet ist (Abb. 3). Für den auf beiden Seiten von der Unterlage abgehobenen Randteil von der Breite L gilt die Gleichung

$$B\,y'' = -M = -\frac{p}{2}\,x\,(L-x) + \frac{M_a}{L}\,x.$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $x = 0 \ldots y = 0$, $y' = 0$ und $x = L \ldots y = 0$ erhalten wir nach zweimaliger Integration die Breite des abgehobenen Plattenstreifens

$$L = 2 \cdot \sqrt{M_a/p}.$$

Der Grenzwert des Momentes, für den sich die ganze Platte mit Ausnahme der Mittellinie abhebt ($L \to a$), folgt daraus zu $\overline{M}_a = \frac{p\,a^2}{4}$. Die einmal integrierte Differentialgleichung gibt

$$B\,y'(L) = B\,\varphi_a = -\frac{p\,L^3}{12} + \frac{1}{2}\,M_a \cdot L$$

oder

$$B\,\varphi_a = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M_a^{\,3}}{p}} \ldots\ldots\ldots \text{Bereich I } (b > 0).$$

Es besteht also auch in diesem Fall zwischen φ_a und M_a eine nichtlineare Beziehung.

Übersteigt das Randmoment den Grenzwert $\overline{M}_a = p\,a^2/4$, dann wird die Auflagerreaktion Q in Plattenmitte immer kleiner, ohne daß sich die Mittellinie der Platte zunächst abhebt. Die Differentialgleichung lautet jetzt (Abb. 4):

$$B\,y'' = \frac{p\,x}{2}(2\,a - x) - M_a - \frac{Q\,x}{2}.$$

Unter Berücksichtigung der 3 Randbedingungen $y(0) = 0$, $y(a) = 0$ und $y'(a) = 0$ erhält man daraus die $M_a - \varphi_a$-Linie

$$B\,y'(0) = B\,\varphi_a = M_a/4 - p\,a^3/48 \ldots\ldots\ldots \text{Bereich II } (b = 0,\ y_a = 0).$$

Wird M_a größer als $5\,p\,a^2/12$, so hebt sich auch die Mittellinie von der Unterlage ab, es ist dann $y_a \neq 0$ und $Q = 0$. Die Differentialgleichung der elastischen Fläche lautet dann:

$$B\,y'' = \frac{p\,x}{2}(2\,a - x) - M_a.$$

Die zwei Integrationskonstanten lassen sich aus den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(a) = 0$ berechnen und man erhält die $M_a - \varphi_a$-Beziehung

$$B\,\varphi_a = M_a \cdot a - p\,a^3/3 \ldots\ldots\ldots \text{Bereich III } (y_a \neq 0).$$

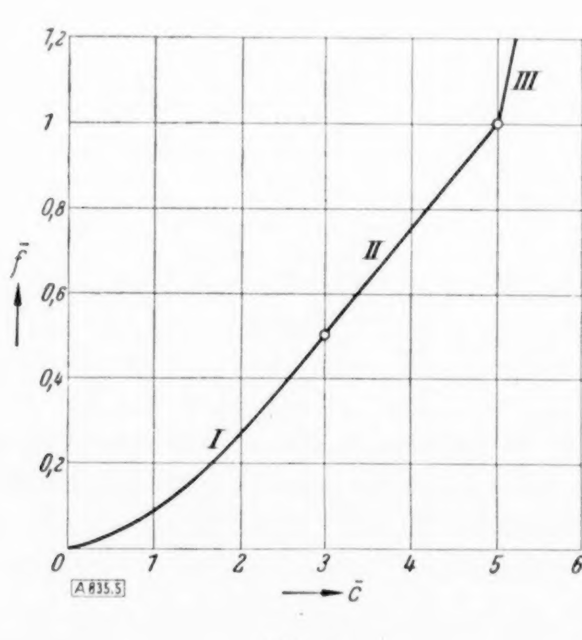


Abb. 5.

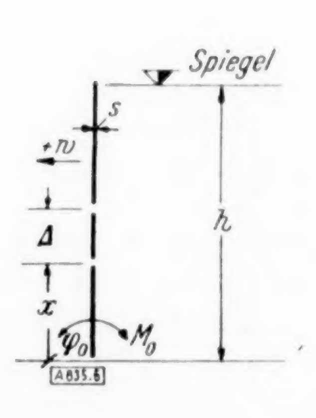


Abb. 6.

Der aus diesen drei Teilen bestehende Linienzug ist punktweise stetig (Abb. 5). An der Grenze der Bereiche II und III hat er einen Knick. Damit scheint auch der Knick in der $M_a - \varphi_a$-Linie der Kreisplatte gerechtfertigt.

Der lineare Bereich II tritt bei der Kreisplatte (Abb. 2) nicht auf. Für $b > 0$ hat die Platte im Mittelpunkt die Krümmung 0, demnach verschwindet dort auch das Moment. Der Auflagerdruck längs des Kreises mit dem Halbmesser b geht für $b \to 0$ in die Punktlast Q über, welche das Radialmoment $G_1 = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{a}{r}$ erzeugt[3]). Als Grenzwert des Bereiches I muß G_1 zunächst den Wert 0 haben, was nur möglich ist, wenn $Q = 0$, d. h. an der Bereichgrenze I/II sind schon die Voraussetzungen für den Bereich III gegeben, so daß Bereich II wegfällt.

Im folgenden soll noch gezeigt werden, wie sich unsere Ergebnisse auf die eingangs erwähnten Rotationsschalen anwenden lassen.

[3]) Auerbach-Hort, 3. Bd., S. 154 (75).

Zylindrischer Behälter. Eine Kreisplatte bilde den Boden eines geraden zylindrischen Behälters mit der Höhe h, der mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht γ gefüllt ist (Abb. 6). Die Differentialgleichung des Zylindermantels lautet unter Vernachlässigung der Querdehnung ($\nu = 0$)[4])

$$K \frac{d^4 w}{d x^4} + \frac{E s}{a^2} w = \gamma (h - x), \qquad K = \frac{E s^3}{12}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet mit $k = \sqrt[4]{\frac{E s}{4 K}}\, a^2$

$$w = e^{-k\frac{x}{a}} \left(C_1 \cos k \frac{x}{a} + C_2 \sin k \frac{x}{a} \right) + e^{k\frac{x}{a}} \left(C_3 \cos k \frac{x}{a} + C_4 \sin k \frac{x}{a} \right) + \frac{a^2 \gamma}{E s} (h - x).$$

Am oberen Rand ($x = h$) ist Moment und Querkraft gleich null. Dies ist, wie man sich durch Bildung von w'' und w''' leicht überzeugt, bei größerer Höhe nur dann möglich, wenn C_1 und C_2 viel größer sind als C_3 und C_4. Infolgedessen kann man in den Ausdrücken, in denen neben C_1 oder C_2 auch C_3 oder C_4 als Summanden vorkommen, letztere vernachlässigen. Da für $x = 0$ auch w annähernd null sein wird, erhält man schließlich die $M_0 - \varphi_0$-Beziehung

$$\varphi_0 = \frac{k}{a} (C_2 - C_1) - \frac{\gamma a^2}{E s} = \frac{1}{K} \left[\frac{k}{a} \frac{\gamma a^2 h s^2}{12} - \frac{M_0 a}{2 k} - \frac{\gamma a^2 s^2}{12} \right].$$

An der Stoßstelle von Bodenplatte und Mantel gilt $M_a = M_0$ und $\varphi_a = \varphi_0$. Der Schnittpunkt der $M_0 - \varphi_0$-Geraden des Mantels mit der $M_a - \varphi_a$-Linie des Bodens liefert das M_a und φ_a bzw. das M_0 und φ_0 unseres Belastungsfalles (Abb. 7, 8 und 9). In Abb. 7a liefert z. B. die

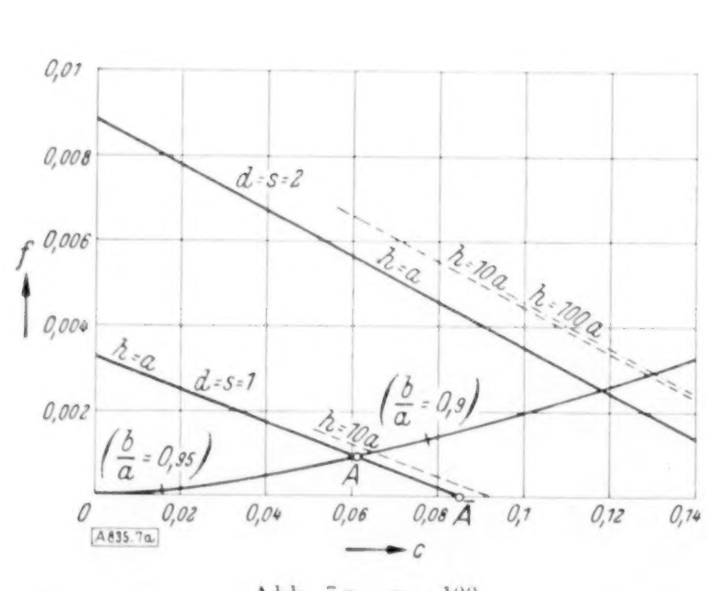


Abb. 7a. $a = 100$.

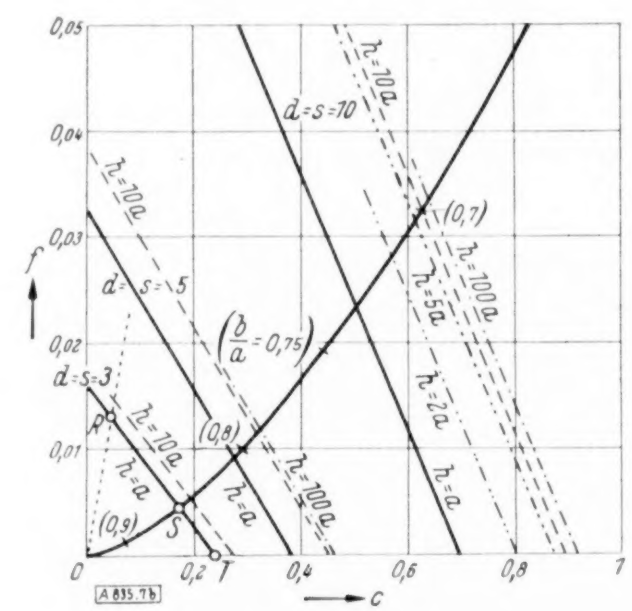


Abb. 7b. $a = 100$.

Abszisse des Punktes A das Moment an der Verbindungsnaht zwischen Boden und Mantel, die Ordinate gibt die Tangentenverdrehung. Die Abszisse des Punktes $\bar{A}$ gibt das Moment für $\varphi_0 = 0$, also bei starrer Einspannung des Mantels in den unnachgiebigen Untergrund. Für die Zahlenrechnung ist $\gamma = 1$ gesetzt. Als praktische Folgerung kann man aus den Abb. 7

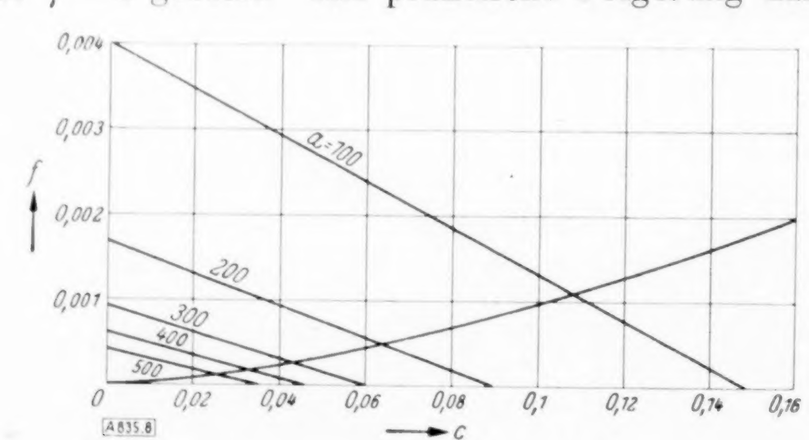


Abb. 8. $h = 100$, $d = s = 2$.

und 8 entnehmen, daß bei gleicher Dicke von Boden und Mantel und gleichem E das Verhältnis v des Basismomentes $\overline{M}_0$ bei starrer Einspannung zum Moment M_0 bei biegungssteifem Anschluß an die elastische Bodenplatte ($v = \overline{M}_0 : M_0$) ohne Rücksicht auf die Höhe h und die Wandstärke, solange diese wesentlich kleiner ist als der Halbmesser a (solange also die

[4]) Wie [1]).

übliche Schalentheorie anwendbar ist), den festen Näherungswert $v = 1{,}4$ hat. Umgekehrt ist das Moment M_a rund 70% des Momentes $\overline{M}_a$, welches bei starrer Einspannung an der Basis auftreten würde und sich leicht berechnen läßt.

Bei verschiedener Wandstärke von Zylinder und Bodenplatte erhalten wir folgendes Ergebnis (Abb. 9):

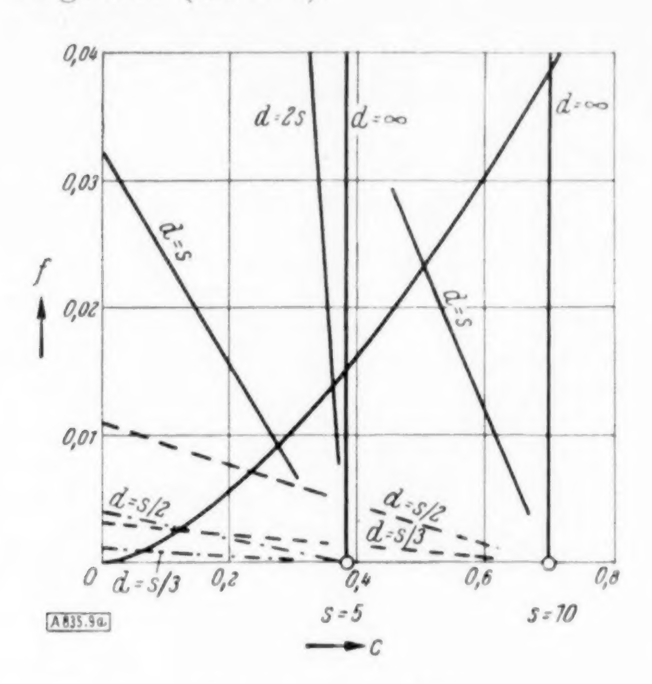


Abb. 9a. $h = a = 100$.

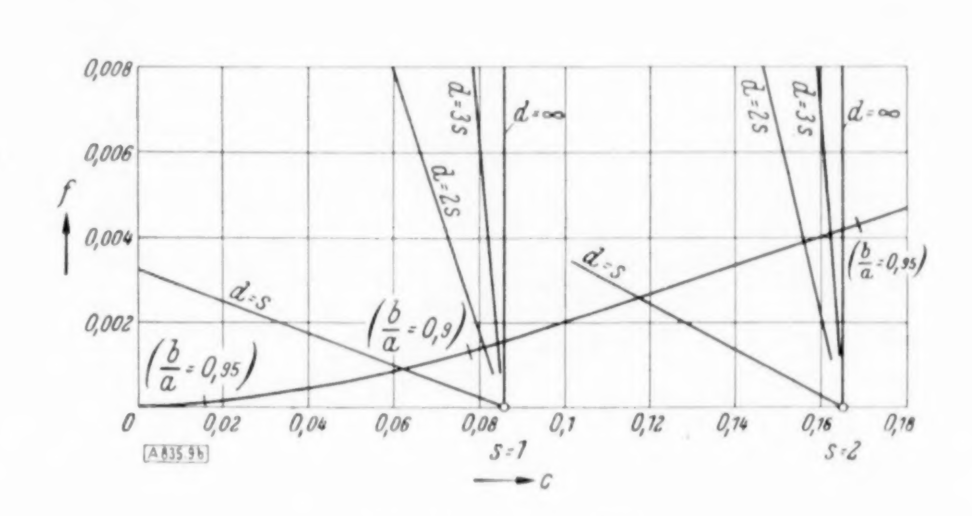


Abb. 9b. $h = a = 100$.

Ist der Boden dicker als der Mantel ($d > s$), so nähern sich die Verhältnisse sehr rasch denen bei starrer Einspannung, im anderen Fall ($d < s$) nimmt das Basismoment rasch ab.

Allgemeine Bemerkungen. Der Anwendungsbereich der $M_a - \varphi_a$-Linie des Bodens (Abb. 2) ist natürlich nicht auf die eben behandelte zylindrische Mantelform beschränkt, sondern sie kann für jede Drehschale, die biegungssteif mit einem ebenen Kreisboden konstanter Dicke verbunden ist, verwendet werden. Voraussetzung ist gleichförmige Flächenlast und unnachgiebige Unterlage und daß sich die $M_0 - \varphi_0$-Linie der Mantelschale rechnerisch oder zeichnerisch ermitteln läßt. Es ist anzunehmen, daß sich auch bei gekrümmtem Meridianschnitt der Mantelschale ähnliche einfache Beziehungen ergeben. Die Vernachlässigung der Querdehnung dürfte das Resultat nach den bisherigen Erfahrungen in der Plattentheorie nicht wesentlich beeinflussen.

Bei allen Belastungsfällen und Randbedingungen der Platte von beliebiger Gestalt auf unnachgiebiger Unterlage ist folgendes zu beachten: Auch unter der Annahme, daß der Baustoff dem Hookeschen Gesetz gehorcht, besteht zwischen Belastung und Verformung keine Linearität. Wir haben also hier ähnliche Verhältnisse, wie wir sie sonst bei statischen Problemen nur außerhalb des Linearitätsbereiches des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes antreffen. Infolgedessen ist das Superpositionsprinzip nicht anwendbar. Die Ursache dieser Erscheinung ist darin zu suchen, daß wir es mit Platten zu tun haben, deren freie Stützweite sich mit der Belastung ändert.

Von den übrigen Belastungsfällen der Kreisplatte auf starrer Unterlage, die als Dauerzustand oder als Übergangszustand z. B. beim Abheben von Gefäßen von ihrer Unterlage auftreten können, sei nur noch einer kurz gestreift.

Die Kreisplatte auf überhöhtem Rand. Eine Kreisplatte mit dem Halbmesser a sei wieder mit der Gleichlast p belastet und ihr Rand ruhe auf einem um t höher liegenden Auflagerring. Das Randmoment M_a sei null (Abb. 10).

Wir wollen den Zusammenhang zwischen der Größe b und der Überhöhung t ermitteln. Die Gleichung der elastischen Fläche ist wieder

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{B}.$$

Die Randbedingungen 1, 3, 4 und 5 sind dieselben wie früher. Die Bedingung 2 nimmt die Form an $r = a \ldots w = -t$. Der Zusammenhang zwischen t und b/a hat die Gestalt

$$t = \frac{p\,a^2}{32\,B} j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

worin j eine Funktion von b/a ist, und zwar hat es folgende Werte:

Zahlentafel III.

b/a	0,95	0,90	0,7	0,5	0,3	0,1	0,01	0
j	$6{,}25 \cdot 10^{-6}$	$1{,}35 \cdot 10^{-4}$	0,011	0,085	0,333	0,95	1,97	2,5

Die Konstanten der elastischen Fläche sind wieder Funktionen von b/a. Bei gegebener Belastung p und gegebenen Abmessungen B, a und t liefert Gl. (8) die Größe j und Abb. 11 den dazugehörenden Wert b/a.

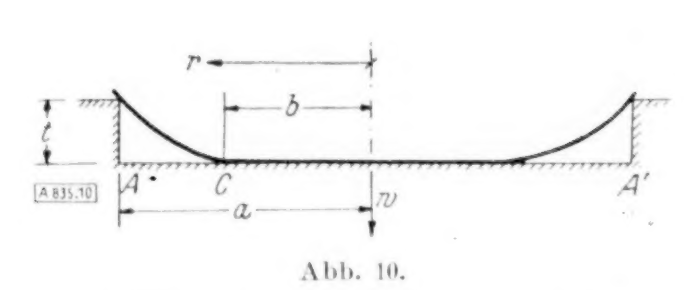


Abb. 10.

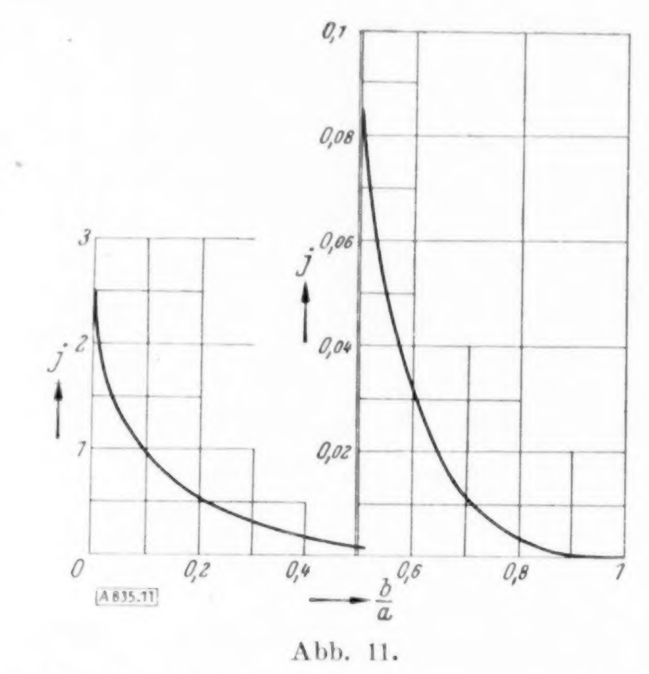


Abb. 11.

Platte auf elastischer Unterlage. Zum Schluß sei noch der Unterschied gegenüber einer Platte auf elastisch nachgiebiger Unterlage erwähnt. Die Differentialgleichung der Kreisplatte lautet in diesem Fall:

$$\Delta \Delta w = \frac{p - \beta w}{B}.$$

Darin ist β die sogenannte Bettungsziffer, d. h. der Druck je Flächeneinheit, der die Bettung um eine Längeneinheit zusammendrückt.

Die in Polarkoordinaten geschriebene Differentialgleichung ist in der Literatur schon wiederholt behandelt worden (Hertz, Föppl, Schleicher u. a.). Ihre Lösung lautet in allgemeiner Form:

$$w = \frac{p}{B} + C_1 J_0 (x \sqrt{+i}) + C_2 J_0 (x \sqrt{-i}) + C_3 Y_0 (x \sqrt{+i}) + C_4 Y_0 (x \sqrt{-i}).$$

J_0, Y_0 sind Besselfunktionen nullter Ordnung erster bzw. zweiter Art, $x = r : \sqrt[4]{\frac{B}{\beta}}$.

Nach Einführen der Randbedingungen bleibt schließlich als Lösung:

$$w = \frac{p}{\beta} + C_1 J_{01} + C_2 J_{02}.$$

Darin ist in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise bei Tölke („Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen") J_{01} der Realteil und J_{02} der Imaginärteil von $J_0(x\sqrt{i})$. Aus dem Wert w läßt sich die (lineare) $M_a - \varphi_a$-Beziehung ermitteln.

Steht diese Platte wieder in biegungssteifer Verbindung mit einem Zylindermantel, dann liefert der Schnittpunkt der „Zylindergeraden" mit der „Bodengeraden" das Moment und die Tangentenverdrehung an der Stoßstelle, Abb. 7b. In praktischen Fällen wird dieses Basismoment (R) immer wesentlich kleiner sein als das Moment des an seiner Basis starr eingespannten Zylinders (T) und auch kleiner als beim Zylinder mit elastischem Boden auf starrer Unterlage (S). Für $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm² und $\beta = 5$ kg/cm³, $a = 100$ und $s = d = 3$ ergibt sich die punktierte Bodengerade in Abb. 7b.

Da zwischen Platte und Unterlage in der Regel keine Zugkräfte auftreten können, wird sich für großes β die Platte schon bei sehr kleinen Verformungen von der Unterlage abheben. Der Schnittpunkt R der Bodengeraden und Zylindergeraden liegt auch bei sehr großem β immer oberhalb S und erreicht dies erst bei $\beta = \infty$, d. h. wenn der Behälter auf starrer Unterlage steht. S ist die untere Grenzlage von R. Mithin ist das Basismoment bei elastischer Unterlage immer kleiner als das bei starrer Unterlage.

Zur numerischen Integration hyperbolischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von *F. Pfeiffer* in Stuttgart.

In dem Picardschen Verfahren der sukzessiven Approximation[1]) und dem Ackermannschen Integralgleichungsverfahren[2]) besitzt man zwei Methoden, die sich zur numerischen Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z + g(x,y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bei folgenden Randbedingungen eignen:

1. Auf zwei sich schneidenden Charakteristiken (das sind hier Parallele zu den Koordinatenachsen) sind die Werte von z vorgegeben (1. Anfangswertproblem).

2. Auf einer nichtcharakteristischen Kurve seien gegeben die Werte z und $\frac{\partial z}{\partial x}$, oder z und $\frac{\partial z}{\partial y}$, oder schließlich $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dazu z in einem Punkt der Kurve (2. Anfangswertproblem, Cauchysches Problem).

3. Auf einer Charakteristik und einer sie schneidenden nichtcharakteristischen Kurve seien die Werte von z vorgegeben (3. Anfangswertproblem).

Beim Picardschen Verfahren ist die Konvergenz bei Stetigkeit der Funktionen $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $g(x,y)$ und Stetigkeit der ersten Ableitung der in den Randbedingungen auftretenden Funktionen nachgewiesen; für die numerische Rechnung ist besonders wesentlich, daß die für die Bildung der n-ten Iteration erforderlichen partiellen Ableitungen der bei der $(n-1)$-ten Iteration gewonnenen Funktion $z_{n-1}(x,y)$ durch Integration erhalten werden können. Das Ackermannsche Verfahren ersetzt die Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei geeignete Differentialgleichungen erster Ordnung und gewinnt $z(x,y)$ dann als Lösung einer Integralgleichung durch ein konvergentes Iterationsverfahren.

Numerische Beispiele zum Picardschen und Ackermannschen Verfahren haben (im Anschluß an meine Vorlesung über numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen) Herr Dr. E. Pflanz und Herr F. Leypoldt durchgeführt; sie zeigen jedenfalls im Beispiel die praktische Brauchbarkeit der Methoden hinsichtlich Zeitaufwand und erreichter Genauigkeit. Herr Leypoldt hat auch darauf hingewiesen, daß beim sog. 4. Anfangswertproblem (auf zwei sich schneidenden nichtcharakteristischen Kurven seien die Werte z vorgegeben) das Picardsche und das Ackermannsche Verfahren für die numerische Behandlung nicht geeignet sind.

Es soll hier die Frage erörtert werden, wie weit sich die genannten Verfahren zur numerischen Behandlung auch der allgemeineren hyperbolischen Differentialgleichung

$$R(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2S(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z + g(x,y) \quad . \quad (2)$$

unter den genannten Randbedingungen 1. bis 3. heranziehen lassen[3]).

Bekanntlich kann man diese allgemeinere Differentialgleichung auf die Form (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = A(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + B(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \eta} + C(\xi,\eta)z + G(\xi,\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

bringen, wenn man $\xi = \varphi(x,y)$ und $\eta = \psi(x,y)$ als neue unabhängige Variable einführt, wobei $\varphi(x,y) = \text{const.}$ und $\psi(x,y) = \text{const.}$ die beiden Scharen von Charakteristiken der Differentialgleichung (2) sind. Aber der praktische Rechner muß dazu erstens die beiden Scharen von Charakteristiken haben und zweitens insbesondere auch die rechte Seite der Gl. (3) wirklich bilden. Dabei sieht es zunächst so aus, als ob dabei die zweiten Ableitungen φ_{xx} usw.

[1]) E. Picard: Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles . . ., Paris 1927, S. 102 ff.
[2]) G. Ackermann: ZAMM, Bd. 13 (1933), S. 416 bis 421.
[3]) Ein anderes Näherungsverfahren zur Behandlung von Differentialgleichung (2) hat Massau gegeben. (J. Massau: Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, Gand 1900, S. 30 ff.; siehe auch Encyklopädie der Math. Wiss., II, C, 2, Artikel Runge-Willers, S. 162.) Auf ein einfaches hydraulisches Problem hat es Herr H. Hahn im Anschluß an die genannte Vorlesung angewandt.

hereinkämen. Wäre dies tatsächlich der Fall, dann wäre die Aufstellung der Gl. (3) und die Anwendung der bei Gl. (1) besprochenen Verfahren auf Gl. (3) vom Standpunkt der Genauigkeit der Rechnung aus ziemlich ausgeschlossen, da man ja die Systeme $\varphi(x, y) = \text{const.}$ und $\psi(x, y) = \text{const.}$ im allgemeinen selbst nur näherungsweise (gewöhnlich graphisch) besitzen wird. Glücklicherweise treten aber nur zwei der ersten Ableitungen, etwa φ_x und ψ_x, auf.

Es liege beispielsweise vor das Cauchysche Anfangswertproblem: längs eines monoton verlaufenden nichtcharakteristischen Kurvenstückes $y = f(x)$ oder $x = h(y)$ seien gegeben $\frac{\partial z}{\partial x} = \chi(x)$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = \omega(y)$, ferner z in einem Punkt der Kurve. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß die Funktionen $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $g(x, y)$ und die in den Randbedingungen auftretenden Funktionen als geschlossene analytische Ausdrücke gegeben sind.

Der erste Schritt ist die Bestimmung der Charakteristiken der Differentialgleichung (2) — das sind hier die Projektionen der auf der Integralfläche liegenden Charakteristiken auf die x, y-Ebene — aus ihrer Differentialgleichung

$$R\,d y^2 - 2 S\,d x\,d y + T\,d x^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{d y}{d x} = \lambda_1(x, y), \qquad \frac{d y}{d x} = \lambda_2(x, y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

mit

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2 S}{R}, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{T}{R}$$

für die beiden Scharen von Charakteristiken.

Im allgemeinen wird man die Gl. (5) durch ein Näherungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung integrieren müssen und diskrete Charakteristiken aufstellen. Wir nehmen an, ein hinreichend dichtes Charakteristikennetz sei nun — durch graphische oder numerische Integration erhalten — in einem hinreichend großen, die gegebene Randkurve enthaltenden Gebiet der x, y-Ebene graphisch vorgelegt. Die Kurven der einen Schar seien $\varphi(x, y) = \xi = \text{const.}$, die der andern $\psi(x, y) = \eta = \text{const.}$ mit $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \lambda_1$ und $-\frac{\psi_x}{\psi_y} = \lambda_2$.

Denkt man sich nun die neuen Variablen ξ und η in die Differentialgleichung (2) eingeführt, so erhält man in bekannter Weise:

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\{R\,\varphi_x \psi_x + S(\varphi_x \psi_y + \psi_x \varphi_y) + T\,\varphi_y \psi_y\} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\{R\,\varphi_{xx} + 2 S\,\varphi_{xy} + T\,\varphi_{yy}\} \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial \eta}\{R\,\psi_{xx} + 2 S\,\psi_{xy} + T\,\psi_{yy}\} = \frac{\partial z}{\partial \xi}(a\,\varphi_x + b\,\varphi_y) + \frac{\partial z}{\partial \eta}(a\,\psi_x + b\,\psi_y) + c\,z + g \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Hierbei wird wegen

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2 S}{T}:$$

$$R\,\varphi_x \psi_x + S(\varphi_x \psi_y + \psi_x \varphi_y) + T\,\varphi_y \psi_y = \varphi_x \psi_x \frac{2}{T}(R\,T - S^2) \quad \text{oder}$$

(falls etwa φ_x oder ψ_x Null wäre):

$$= \varphi_y \psi_y \frac{2}{R}(R\,T - S^2).$$

Ferner lassen sich nun die zweiten Ableitungen von φ und ψ beseitigen. Es ist

$$-\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{1}{\varphi_y}\varphi_{xx} + \lambda_1 \frac{1}{\varphi_y}\varphi_{xy} \qquad \text{und} \qquad -\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = \frac{1}{\varphi_y}\varphi_{xy} + \lambda_1 \frac{1}{\varphi_y}\varphi_{yy}$$

oder

$$\varphi_{xx} + \lambda_1 \varphi_{xy} = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\varphi_x \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 \varphi_{xy} + \frac{T}{R}\varphi_{yy} = -\lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\varphi_y.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen der letzten Zeile folgt

$$\varphi_{xx} + (\lambda_1 + \lambda_2)\varphi_{xy} + \frac{T}{R}\varphi_{yy} = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\varphi_x - \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\varphi_y$$

oder

$$R\varphi_{xx} + 2S\varphi_{xy} + T\varphi_{yy} = \frac{R}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\varphi_x - \frac{T}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\varphi_y$$

oder

Analog ist

$$\left.\begin{aligned} R\varphi_{xx} + 2S\varphi_{xy} + T\varphi_{yy} &= \frac{\varphi_x}{\lambda_1} R\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right). \\ R\psi_{xx} + 2S\psi_{xy} + T\psi_{yy} &= \frac{\psi_x}{\lambda_2} R\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (7).$$

Damit geht die gegebene Differentialgleichung (2) über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\varphi_x \psi_x \frac{4}{T}(RT - S^2) + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\varphi_x}{\lambda_1} R\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\psi_x}{\lambda_2} R\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right) \\ = \frac{\partial z}{\partial \xi}(a\varphi_x + b\varphi_y) + \frac{\partial z}{\partial \eta}(a\psi_x + b\psi_y) + cz + g \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8),$$

oder

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = A\frac{\partial z}{\partial \xi} + B\frac{\partial z}{\partial \eta} + Cz + G$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{R}{4(RT - S^2)}\frac{1}{\psi_y}\left\{R\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right) - a\lambda_1 + b\right\} \\ B &= \frac{R}{4(RT - S^2)}\frac{1}{\varphi_y}\left\{R\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right) - a\lambda_2 + b\right\} \\ C &= \frac{R}{4(RT - S^2)}\frac{1}{\varphi_y \psi_y}c \\ G &= \frac{R}{4(RT - S^2)}\frac{1}{\varphi_y \psi_y}g \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (9).$$

Man braucht also die ersten Ableitungen φ_y und ψ_y (oder φ_x und ψ_x), die man den Kurvenscharen $\varphi(x, y) = \text{const.}$ und $\psi(x, y) = \text{const.}$ entnehmen muß.

Durch die Gl. (9) hat man A, B, C, G als Funktionen von x und y, die man im allgemeinen in diskreten Punkten berechnen und in Kurventafeln $A(x, y) = \text{const.}$, $B(x, y) = \text{const.}$, $C(x, y) = \text{const.}$, $G(x, y) = \text{const.}$ darstellen wird. Für die Behandlung der Gl. (3) nach den Verfahren von Picard und Ackermann braucht man A, B, C, G als Funktionen von ξ und η. Die Funktion $A(\xi, \eta)$ ist für diskrete Stellen ξ, η jedenfalls so zu erhalten: Man hat in einem ersten x, y-Koordinatensystem die Kurven $A(x, y) = \text{const.}$ und in einem zweiten x, y-Koordinatensystem auf Pauspapier die Kurven $\varphi(x, y) = \xi = \text{const.}$ und $\psi(x, y) = \eta = \text{const.}$ Man legt die beiden Koordinatensysteme mit ihren gleichnamigen Achsen aufeinander und kann damit zu jedem Punkt ξ, η (direkt oder durch Interpolation) $A(\xi, \eta)$ ablesen.

Für die Aufstellung der Anfangsbedingungen in der ξ, η-Ebene läßt sich die Randkurve selbst mit Hilfe des Netzes der Charakteristiken punktweise aus der x, y-Ebene in die ξ, η-Ebene übertragen, und die Ableitungen in diskreten Punkten auf der übertragenen Kurve ergeben sich durch die Transformationsformeln

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)\varphi_y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)\psi_y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \ldots (10),$$

wobei wieder die ersten partiellen Ableitungen φ_y und ψ_y (oder φ_x und ψ_x) erforderlich sind.

Mit dem Picardschen oder dem Ackermannschen Verfahren hat man dann das Cauchysche Anfangswertproblem für die Differentialgleichung (3) zu lösen, wobei die Funktionen $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$, $C(\xi, \eta)$, $G(\xi, \eta)$, ferner die Randkurve und die Werte der Ableitungen auf ihr für diskrete Werte ξ, η gegeben sind. Die beiden Verfahren ergeben damit in den Punkten eines achsenparallelen Gitters über der ξ, η-Ebene die Funktionswerte $z(\xi, \eta)$ in dem Rechtecksbereich, der durch die Parallelen zur ξ- und zur η-Achse durch die Endpunkte des Randkurvenstückes begrenzt ist.

Sind die Funktionen $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $g(x, y)$ und die Bestimmungsstücke längs der Randkurve und diese selbst nur durch Zahlentabellen oder graphisch gegeben, so kommt hinzu, daß auch $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}$ durch näherungsweise Differentiation bestimmt werden müssen. In der näherungsweisen Differentiation ist — gerade hinsichtlich der Genauigkeit — der prinzipiell unangenehmste Teil des Verfahrens zu sehen, wenngleich die Mühe der Rechnung bei Daten in Form geschlossener analytischer Ausdrücke, falls sie kompliziert sind, nicht geringer zu sein braucht.

Allgemeine, praktisch brauchbare Fehlerformeln werden sich hier kaum angeben lassen. Den Fehler, den man beim Abbrechen des Picardschen oder Ackermannschen Iterationsverfahrens begeht, hat Herr Leypoldt abgeschätzt; im übrigen sucht man bei jedem einzelnen Schritt der Rechnung den dabei begangenen Fehler abzuschätzen und seinen Einfluß auf den nächsten Schritt zu beurteilen.

Eine wesentliche Vereinfachung der Rechenarbeit ergibt sich in dem Spezialfall:

$$R(x, y) = R_1(x) R_2(y), \qquad S(x, y) = 0, \qquad T(x, y) = T_1(x) T_2(y) \quad \text{mit} \quad R\,T < 0,$$

worunter die noch weitergehende Spezialisierung

$$R(x, y) = R^2(x), \qquad S(x, y) = 0, \qquad T(x, y) = -T^2(y)$$

oder

$$R(x, y) = R^2(y), \qquad S(x, y) = 0, \qquad T(x, y) = -T^2(x)$$

einbegriffen ist.

Da wird die Differentialgleichung der Charakteristiken

$$R_1(x) R_2(y)\, d y^2 + T_1(x) T_2(y)\, d x^2 = 0,$$

so daß die Bestimmung der Charakteristiken

$$\varphi(x, y) = Y(y) - X(x) = \xi \quad \text{und} \quad \psi(x, y) = Y(y) + X(x) = \eta$$

mit

$$X(x) = \int \sqrt{-\frac{T_1}{R_1}}\, d x \quad \text{und} \quad Y(y) = \int \sqrt{\frac{R_2}{T_2}}\, d y$$

hier nur zwei Quadraturen erfordert.

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{T_1 T_2}{R_1 R_2}} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\sqrt{-\frac{T_1 T_2}{R_1 R_2}}$$

verlangen zur Bestimmung der partiellen Ableitungen höchstens die numerische Differentiation einer Funktion einer Veränderlichen, und $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$ erfordern überhaupt nicht die Ausführung einer Differentiation.

Auch die Bestimmung der Funktionen $A(\xi, \eta)$ usw. ist hier besonders einfach. Um für ein gegebenes Wertepaar ξ, η den Wert $A(\xi, \eta)$ zu erhalten, bildet man

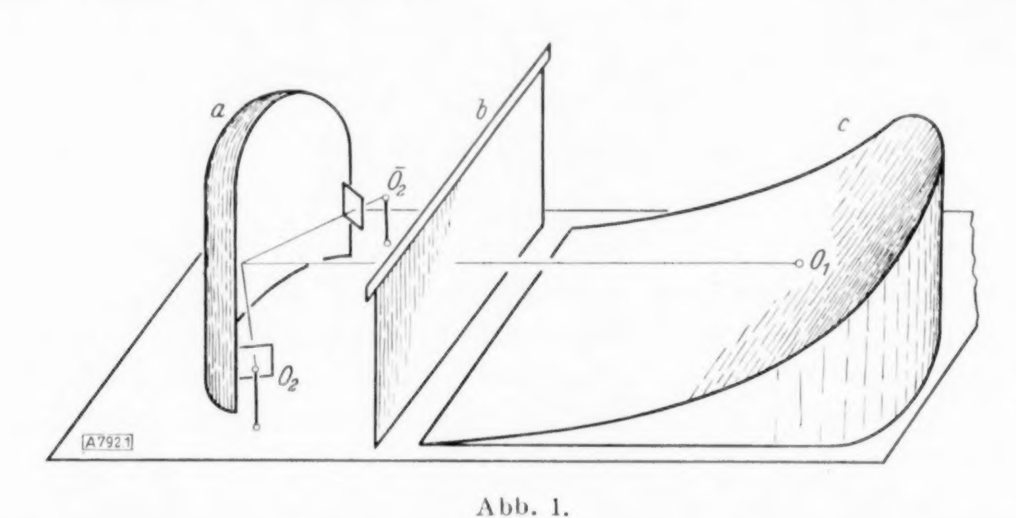
$$\xi + \eta = 2\,Y, \qquad \eta - \xi = 2\,X,$$

entnimmt aus den Kurven $Y(y)$ und $X(x)$ dazu y und x und erhält durch Berechnung des $A(x, y)$ oder aus der Tafel der Kurven $A(x, y) = \text{const.}$ das gesuchte $A(\xi, \eta)$. Allenfalls kann man dabei eine Skalendarstellung der Funktionen $X(x)$ bzw. $Y(y)$ auf der x-, bzw. y-Achse des für die Kurven $A(x, y) = \text{const.}$ verwendeten Koordinatensystems benützen.

Zur mathematischen Behandlung der Kulissenprojektion.

Von *Ulrich Graf* in Danzig.

Bei modernen Bühnenanlagen werden die Hintergrundkulissen auf eine gewölbte Fläche, den Rundhorizont, projiziert. Dieser Rundhorizont ist bei den einzelnen Bühnen in verschiedener Form ausgebildet: z. T. ist er fest gemauert und hat dann im allgemeinen die Gestalt eines Zylinderteiles mit aufgesetzter Kuppel, z. T. ist er beweglich aus Tuch oder Gaze und hängt in Gestalt einer Zylinderfläche vom Schnürboden an einem Bügel herab. Auf den Rundhorizont wird von einer oder von mehreren Stellen aus projiziert; im zweiten Falle muß dafür gesorgt werden, daß die verschiedenen Projektionen an den Überdeckungslinien richtig zusammenpassen. Der Rundhorizont schließt den Bühnenraum nach hinten ab; die Projektionsapparate sind im allgemeinen seitlich davor aufgebaut. Nur in Ausnahmefällen wird von hinten auf den durchsichtigen Gazeschleier eines zylindrischen Horizontes projiziert, da sich bei dieser Stellung des Projektionsapparates die Lichtquelle im Zuschauerraum leicht störend bemerkbar macht. In Abb. 1 ist schematisch die Lage eines festen Rundhorizontes mit zwei Projektionsapparaten, Bühnenraum und Zuschauerraum skizziert; die Verhältnisse entsprechen ungefähr denen im Theater des Volkes, Berlin.



a) Rundhorizont,
b) Vorhangebene,
c) Zuschauerraum.

Abb. 1.

Die geometrische Aufgabe der Kulissenprojektion besteht nun darin, die Verzerrung auf der Projektionsplatte zu bestimmen, d. h. die Figuren auf dieser Platte derart zu konstruieren, daß ihre Projektion auf den gewölbten Rundhorizont für einen im Zuschauerraum angenommenen Betrachter den zentralperspektiv richtigen Eindruck des darzustellenden Gegenstandes hervorruft.

Vollkommen richtig wird dieser Eindruck nur von einer einzigen Stelle O_1 des Zuschauerraumes aus sein können, von den andern Plätzen gesehen wird die Kulisse verzerrt wirken. Jedoch macht sich diese Verzerrung um so weniger störend bemerkbar, je schmaler der Zuschauerraum ist und je weiter der Rundhorizont von ihm entfernt ist. In der Praxis hat man mit dieser Art der Kulissenprojektion die besten Erfahrungen gemacht, um so mehr, als bei Landschaften, Bergen, Wäldern, Wolken usw. eine leichte Verzerrung nicht ins Gewicht fällt. Bei der Projektion von Architekturen, insbesondere Innenräumen mit Deckenkonstruktionen dagegen muß eine verzerrte Wirkung von ungünstig gelegenen Zuschauerplätzen aus in Kauf genommen werden. Diese Verzerrung läßt sich jedoch dadurch vermindern, daß für die seitlichen Teile des Rundhorizontes, die nur von den Seitenplätzen des Zuschauerraumes, nicht aber von den Mittelplätzen aus sichtbar sind, neue Augpunkte an den Seiten des Zuschauerraumes gewählt werden.

A. Die Verzerrungsgesetze.

Die auf den Projektionsplatten vorzunehmende Verzerrung gegenüber einer normalen zentralperspektiven Ansicht des darzustellenden Hintergrundes hängt in erster Linie von der Form des Rundhorizontes, weiterhin von der Lage der Projektionszentren, Stellung der Projektionsplatten und Brennweiten der Projektionsapparate, schließlich von der Lage des als Norm angenommenen Zuschauers O_1, d. h. von den Abmessungen des Bühnen- und Zuschauerraumes ab.

Die geometrische Aufgabe besteht darin, den Zusammenhang aufzusuchen zwischen zwei Strahlenbündeln mit den Zentren O_1 und O_2, für die zugeordnete Strahlen einander auf der Schirmfläche F schneiden (Abb. 2). Wird O_1 als Zuschauerauge und O_2 als Projektionszentrum

gewählt, so durchstoßen die Sehstrahlen $O_1\mathfrak{P}$, mit denen der Zuschauer einen darzustellenden Gegenstand $\{\mathfrak{P}\}$ abtastet, die Schirmfläche F in denjenigen Punkten $\bar{P}$, zu denen die Projektionsstrahlen $O_2\bar{P}$ führen müssen. Beim Abtasten des Gegenstandes $\{\mathfrak{P}\}$ mit dem Sehstrahl $O_1\mathfrak{P}$ zeichnet dann der mitwandernde Projektionsstrahl $O_2\bar{P}$ auf der Projektionsplatte π die gesuchte verzerrte Figur $\{P'\}$ auf.

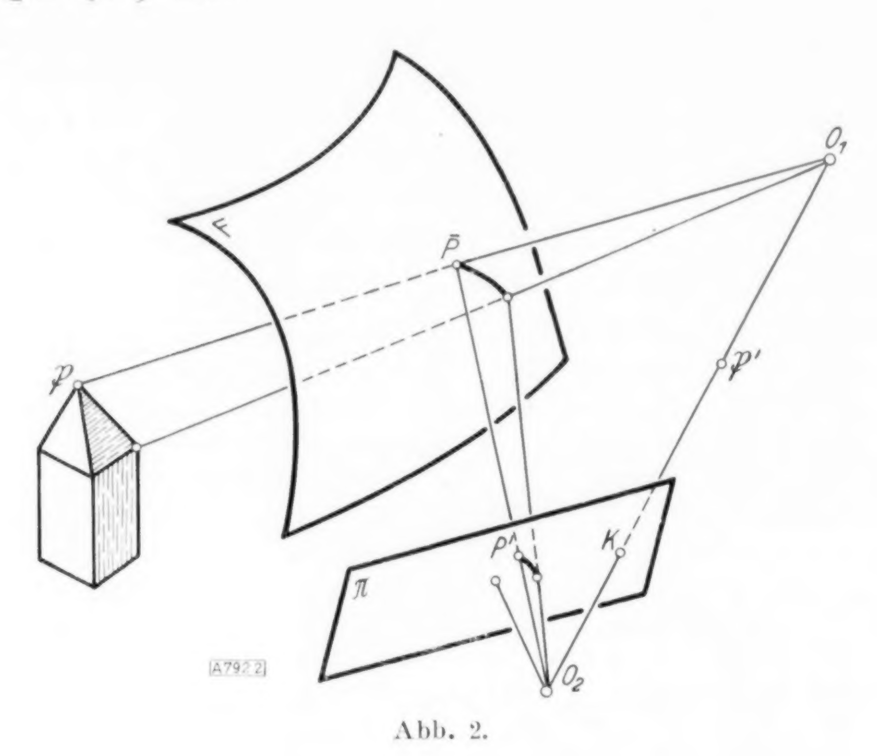


Abb. 2.

1. Die Verzerrung für algebraische Schirmflächen. Ist die Schirmfläche eine algebraische Fläche der Ordnung n, so trifft jeder Sehstrahl $O_1\mathfrak{P}$ diese Fläche F^n in n Punkten $\bar{P}_i$, die ihrerseits von n Projektionsstrahlen $O_2\bar{P}_i$ angestrahlt werden. Jeder dieser Strahlen bestimmt einen Schnittpunkt P_i' auf der Projektionsplatte π, so daß demnach einem Gegenstandspunkt $\mathfrak{P}$ n Bildpunkte P_i' zukommen.

Irgendeine Gegenstandsgerade $\mathfrak{g}$ wird von dem Auge O_1 aus in der Sehebene $(O_1\mathfrak{g})$ gesehen, die die Schirmfläche in einer Kurve n. Ordnung schneidet. Der von O_2 ausgehende Projektionskegel zu dieser Kurve ist ebenfalls von n. Ordnung und wird von der Projektionsebene π in einer ebenen Kurve n. Ordnung geschnitten. Demnach gilt:

Eine Gegenstandsgerade $\mathfrak{g}$ *hat als (verzerrtes) Bild auf der Projektionsplatte* π *für eine Schirmfläche* n. *Ordnung eine Kurve* n. *Ordnung.*

Die ∞^2 Geraden $\mathfrak{g}$ in einer Sehebene durch O_1 haben dieselbe Bildkurve n. Ordnung auf π.

Wird als Schirmfläche nicht eine volle Fläche F^n verwandt, sondern nur der Teil einer solchen, so bleiben naturgemäß nicht n Bildpunkte P_i' eines Gegenstandspunktes $\mathfrak{P}$, sondern weniger, und zwar in der Praxis nur einer, und das Bild einer Gegenstandsgeraden $\mathfrak{g}$ ist dementsprechend der Teil einer ebenen Kurve n. Ordnung.

Maßgebend für die Anordnung der ∞^2 Bildkurven n. Ordnung, die als (verzerrte) Bilder der ∞^2 Gegenstandsgeraden $\mathfrak{g}$ auftreten, ist der Kernpunkt K, der als Schnittpunkt des Kernstrahles O_1O_2 mit π gewonnen wird. Jeder Gegenstandspunkt auf diesem Kernstrahl nämlich hat zum Bilde den n-fach zählenden Kernpunkt K, in dem seine n Bildpunkte P_i' zusammengefallen sind, und jede Gegenstandsgerade $\mathfrak{g}$ in einer Sehebene durch den Kernstrahl hat zum Bilde eine n-fach zählende Gerade durch den Kernpunkt K, in die die Bildkurve n. Ordnung entartet ist. In dieser Bildgeraden wird π von der Sehebene geschnitten.

Die Gegenstandspunkte auf dem Kernstrahl haben ihr Bild in dem n-fach zählenden Kernpunkt; die Gegenstandsgeraden in Ebenen durch den Kernstrahl haben ihre Bilder in den n-fach zählenden Geraden durch den Kernpunkt.

Ist $n=1$, also die Schirmfläche F^n eine Ebene, so liegt der in den Elementen der projektiven Geometrie behandelte Fall zweier perspektiv aufeinander bezogener Strahlenbündel $\{O_1\}$ und $\{O_2\}$ vor.

Im folgenden sei $n=2$, also die Schirmfläche eine Fläche zweiter Ordnung. Diese Annahme ist für die praktische Auswertung um so berechtigter, als sich die Flächen der Rundhorizonte sehr gut durch Teile von Flächen zweiter Ordnung annähern lassen.

2. Die Verzerrung für Schirmflächen zweiter Ordnung. Die (verzerrten) Bilder von geraden Gegenstandslinien werden in diesem Falle Kegelschnitte, so daß das verzerrte Bild einer geradlinig begrenzten Gegenstandsfigur eine Figur aus Kegelschnittbögen wird.

Die ∞^4 Geraden des Gegenstandraumes haben als Bilder auf der Projektionsplatte π ∞^2 Kegelschnitte, denn die ∞^2 Geraden in einer Sehebene durch O_1 führen auf denselben Bildkegelschnitt. Der Ebenenbündel mit dem Zentrum O_1 schneidet aus der Schirmfläche F^2 einen Kegelschnittbündel aus, der seinerseits bei der Projektion von O_2 aus in eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Kegelschnitten auf der Projektionsplatte π übergeht. Diese Mannigfaltigkeit in π ordnet sich auch metrisch übersichtlich an, sofern beachtet wird, daß durch den Projektionsvorgang von O_2 aus der Platte π eine nichteuklidische Metrik aufgeprägt wird (Abb. 3)[1].

Der Tangentialkegel von O_2 an die Schirmfläche F^2 schneidet aus π einen Kegelschnitt f^2, der zum Fundamentalgebilde einer nichteuklidischen Maßbestimmung in π erklärt wird. Jede ebene Schnittkurve von F^2 ergibt bei der Projektion von O_2 aus in π einen Kegelschnitt, der f^2 in zwei Punkten berührt, d. h. einen Kreis der π aufgeprägten Metrik. Diejenigen Kegelschnitte auf F^2, die in den Ebenen durch das Auge O_1 liegen, sind die Sichtbilder der Geraden des Gegenstandraumes. Diese ∞^2 Kegelschnitte auf F^2 werden von O_2 aus in ∞^2 Kreise in π im Sinne der π aufgeprägten Metrik projiziert, die, da alle Sehebenen durch O_1 ein Ebenenbündel bilden, ein ebenes Kreissystem[2]) in π ergeben. Ein solches ebenes Kreissystem ist durch seinen Orthogonalkreis festgelegt: jeder der ∞^2 Kreise des Systems schneidet diesen Orthogonalkreis unter rechtem Winkel.

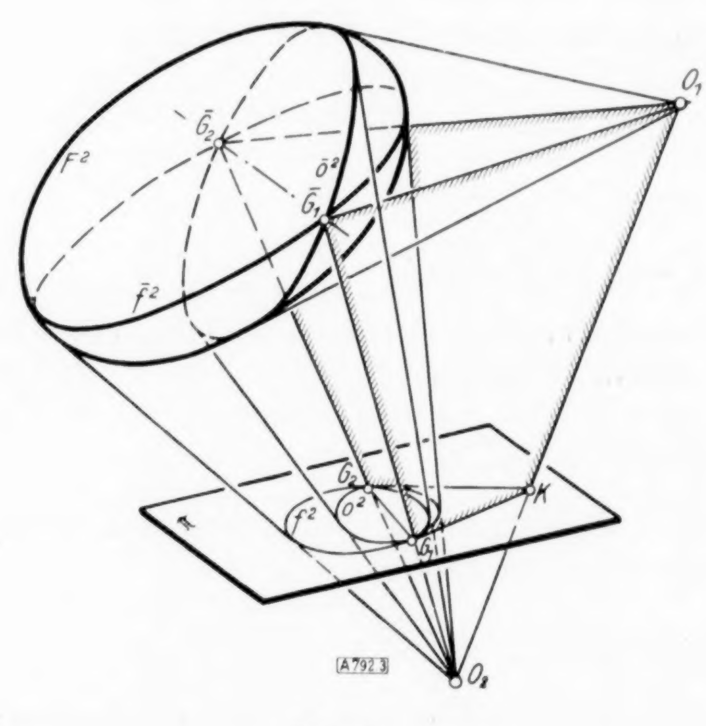


Abb. 3.

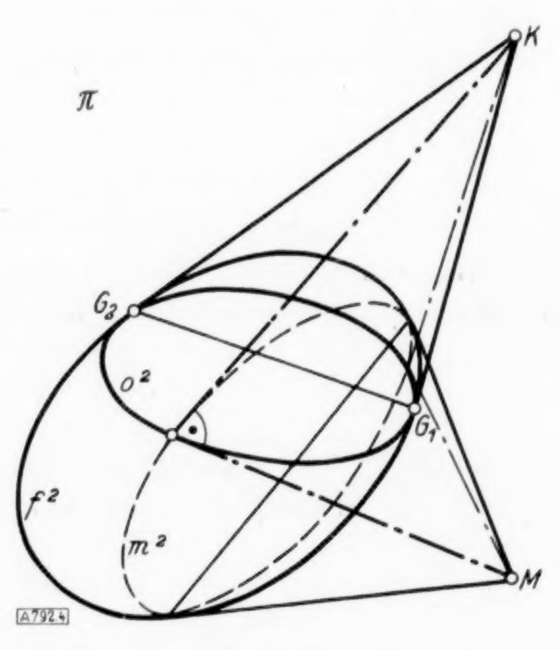


Abb. 4.

Nach bekannten Sätzen der nichteuklidischen Geometrie ist dieser Orthogonalkreis o^2 das von O_2 aus gesehene Projektionsbild desjenigen Kegelschnittes $\bar{o}^2$ auf F^2, längs dessen der von O_1 ausgehende Tangentialkegel die Schirmfläche F^2 berührt; der Kernpunkt K ist der Mittelpunkt dieses Orthogonalkreises (Abb. 3). Die beiden Tangentialebenen $O_1\,\bar{G}_1\,O_2$ und $O_1\,\bar{G}_2\,O_2$ durch den Kernstrahl $O_1\,O_2$ an die Schirmfläche F^2 schneiden aus π die beiden isotropen Geraden $K\,G_1$ und $K\,G_2$ in den beiden absoluten Punkten G_1 und G_2 des Orthogonalkreises o^2 aus; die reziproke Polare $\bar{G}_1\,\bar{G}_2$ des Kernstrahles $O_1\,O_2$ bezüglich der Schirmfläche F^2 hat ihr von O_2 aus gesehenes Projektionsbild in der Achse $G_1\,G_2$ dieses Orthogonalkreises.

Den Ebenenbüscheln in dem Sehebenenbündel durch O_2 entsprechen die geraden Kreisreihen in dem ebenen Bildkreissystem $\{o^2\}$ in π. Abb. 4 zeigt die Projektionsebene π mit dem Fundamentalkegelschnitt f^2, dem Orthogonalkreis o^2 und einem Kreis m^2 des ebenen Bildkreissystems. Dieser Kreis m^2, der in zweien seiner vier Schnittpunkte mit o^2 diesen

[1]) Zur Festlegung dieser Metrik ist außer dem Fundamentalkegelschnitt noch die Streckenkonstante $\varkappa \neq 0$ erforderlich. Diese Konstante spielt jedoch im folgenden keine Rolle, da nur Orthogonalitätsbeziehungen benutzt werden.

[2]) Das ebene Kreissystem in einer nichteuklidischen Geometrie entspricht dem Kreisbündel in einer Geometrie vom euklidischen Typ. Der Ausdruck „Bündel“ muß vermieden werden, da das ebene Kreissystem kein Kegelschnittbündel im Sinne der projektiven Geometrie ist. Ebenso tritt an die Stelle des Kreisbüschels in der nichteuklidischen Geometrie die gerade Kreisreihe, bestehend aus den ∞^1 Kreisen durch zwei feste Punkte.

Orthogonalkreis o^2 senkrecht durchsetzt, ist auf Grund der bekannten Tatsache konstruiert, daß in einer nichteuklidischen Geometrie zwei Gerade aufeinander senkrecht stehen, wenn jede von ihnen durch den absoluten Pol der anderen läuft.

Es gilt somit:

Wird der Schnitt f^2 des Tangentialkegels von O_2 an die Schirmfläche F^2 zum Fundamentalgebilde einer nichteuklidischen Metrik in π erklärt, so sind die (verzerrten) Bilder der Geraden des Gegenstandraumes Kreise im Sinne dieser Metrik, und zwar bilden sie ein ebenes Kreissystem, dessen Orthogonalkreis o^2 mit dem Kernpunkt K als Mittelpunkt aus dem Berührungskegelschnitt des Tangentialkegels von O_1 aus an F^2 durch Projektion von O_2 aus hervorgeht.

Um eine vom Zuschauer O_1 auf der Schirmfläche geradlinig gesehene Figur auf der Projektionsplatte zu erhalten, wird daher auf dieser Platte π zunächst der Fundamentalkegelschnitt f^2 bestimmt und darauf die Verbindungsgerade Projektionszentrum O_2 — Zuschauerauge O_1 mit der Platte π zum Schnitt gebracht. Der Durchstoßpunkt K (Kernpunkt) ist der Mittelpunkt des Orthogonalkreises o^2 im Sinne der π-Metrik. Jeder Kreis, der o^2 senkrecht durchdringt, wird bei der Projektion auf den Schirm vom Zuschauer geradlinig gesehen.

Für die analytische Behandlung der verzerrten Bildkurven in der Projektionsebene π werden homogene Punktkoordinaten $x_0 : x_1 : x_2$ benutzt, in denen das Fundamentalgebilde f^2 die Gleichung

$$f^2{}_{xx} = \sum_{\mu,\nu=0}^{2} a_{\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu = 0; \qquad a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}, \qquad |a_{\mu\nu}| \neq 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

habe. Die Entfernung $\overline{yz}$ zweier Punkte y und z ist durch

$$\overline{yz} = \frac{1}{2\varkappa} \cdot \ln \frac{f^2{}_{yz} + \sqrt{(f^2{}_{yz})^2 - f^2{}_{yy} f^2{}_{zz}}}{f^2{}_{yz} - \sqrt{(f^2{}_{yz})^2 - f^2{}_{yy} f^2{}_{zz}}}$$

mit $\varkappa$ als (hier beliebig wählbaren) metrischen Konstanten erklärt. Die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(m_0 : m_1 : m_2)$ und dem Radius ϱ lautet

$$m^2: \quad (f^2{}_{xm})^2 = \mathfrak{Cof}\, \varkappa\, \varrho \cdot f^2{}_{mm} \cdot f^2{}_{xx}.$$

Ist demnach der Orthogonalkreis o^2 durch seinen Radius r und durch den Kernpunkt K $(k_0 : k_1 : k_2)$ als Mittelpunkt gegeben, also durch seine Gleichung

$$o^2: \quad (f^2{}_{xk})^2 = \mathfrak{Cof}\, \varkappa\, r \cdot f^2{}_{kk} \cdot f^2{}_{xx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

bestimmt, so gehört ein Kreis m^2 dem ebenen Bildkreissystem der Geraden des Zuschauerraumes dann an, wenn $m^2 \perp o^2$, d. h. die Orthogonalitätsbedingung

$$(f^2{}_{km})^2 = \mathfrak{Cof}^2\, \varkappa\, r \cdot \mathfrak{Cof}^2\, \varkappa\, \varrho \cdot f^2{}_{kk} \cdot f^2{}_{mm} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

erfüllt ist[3]).

Ist insbesondere

$$\varrho = \frac{i\pi}{2\varkappa},$$

so ist der Kreis m^2 in die doppelt zählende Gerade

$$f^2{}_{xm} = 0$$

entartet, und die Orthogonalitätsbedingung lautet

$$f^2{}_{km} = 0.$$

Das besagt, daß die Gerade durch den Kernpunkt K läuft, in Übereinstimmung mit der früher gezeigten Tatsache, daß die Gegenstandsgerade in Ebenen durch den Kernstrahl ihre Bilder in den Geraden durch den Kernpunkt haben.

[3]) Diese Bedingung ergibt sich leicht durch Berechnung des Schnittwinkels der Tangente von o^2 und m^2 in ihren Schnittpunkten.

3. Die verschiedenen Typen von Maßbestimmungen auf der Projektionsplatte. Ist die Schirmfläche F^2 einfach singulär, also eine Zylinderfläche, so ändern sich die vorstehenden Resultate insofern ab, als auch die Metrik in der Projektionsebene π singulär wird. Der Tangentialkegel von O_1 an die Schirmfläche ist in ein Ebenenpaar zerfallen, dessen beide Berührungsmantellinien von O_2 aus in ein Geradenpaar in π projiziert werden, das das zerfallene Fundamentalgebilde f^2 darstellt. Die Metrik in π ist somit bei einer zylindrischen Schirmfläche vom dual-euklidischen Typ; die Zeichnungen und Berechnungen für diesen Fall ergeben sich aus den vorstehenden Abbildungen und Formeln nach Durchführung des bekannten Grenzüberganges, durch den eine nichteuklidische Geometrie in die euklidische überführt wird.

Die Art der beiden grundlegenden Kegelschnitte f^2 und o^2 auf der Projektionsplatte π hängt sowohl von der Art der Schirmfläche F^2 als auch von der Lage der beiden Zentren O_1 und O_2 ab. Bei fest gemauerten Rundhorizonten wird von O_2 aus in den gewölbten Teil hinein projiziert, so daß der Fundamentalkegelschnitt f^2 im allgemeinen nullteilig und damit die Metrik in π elliptisch wird. Aus demselben Grund ist bei einer zylindrischen Schirmfläche das absolute Geradenpaar f^2 im allgemeinen konjugiert imaginär, so daß in π eine dual-euklidische Metrik vorliegt. Wird dagegen von hinten auf einen durchscheinenden Gazezylinder projiziert, so sind die beiden Berührungsmantellinien der Tangentialebenen durch O_2 auf ihm reell und die Geometrie in π ist dualpseudoeuklidisch. Auch der Grenzfall kann auftreten, daß die beiden Geraden f^2 zusammenfallen, dann nämlich, wenn von einem Punkt der Schirmfläche selbst aus auf den abgewandten Teil projiziert wird. In diesem Falle jedoch müssen mindestens zwei Projektionszentren verwendet werden, da sich von einer Stelle der Schirmfläche selbst aus nicht die gesamte Schirmfläche anstrahlen läßt.

Die in der Praxis verwendeten Rundhorizonte lassen sich durch Teile von Flächen zweiter Ordnung annähern; von den Kreisen einer nichteuklidischen Metrik in π bleiben somit nur gewisse Bögen als brauchbar stehen. Bei der Zusammensetzung eines Rundhorizontes aus mehreren Teilflächen zweiter Ordnung stoßen auf π die Kreise verschiedener Maßbestimmungen zusammen, die durch die verschiedenen Teilflächen erzeugt werden.

Um ein vorgegebenes Bild, das ein Beschauer von der Stelle O_1 des Zuschauerraumes aus perspektiv richtig sehen soll, bequem verzerren zu können, wird dieses Bild mit einem quadratischen Raster überdeckt und dieser Raster verzerrt. Das Bild läßt sich dann leicht in den verzerrten Raster übertragen[4]). Die beiden Büschel von Rastergeraden bilden sich auf der Projektionsplatte als Kreise zweier geraden Kreisreihen ab, sofern die der Projektionsplatte durch die Schirmfläche F^2 aufgeprägte nichteuklidische Metrik benutzt wird.

Die vorstehenden theoretischen Überlegungen dienen dazu, eine Übersicht über die Art und Anordnung der verzerrten Linien auf der Projektionsplatte zu gewinnen. Im folgenden sollen die verzerrten Raster für einige der Praxis entnommenen Beispiele entworfen werden.

B. Beispiele.

1. Projektion auf einen Gazezylinder. In dem in Abb. 5 (Grundriß-Aufriß-Darstellung) skizzierten Fall wird von hinten auf einen durchscheinenden Gazezylinder projiziert, der durch einen elliptischen Zylinder (Halbachsen a, b) angenähert ist. Die Gebiete in der Nähe der Hauptscheitelmantellinien sind durch die Seitenkulisse verdeckt; sie werden nicht mehr angestrahlt. Das Projektionszentrum O_2 liegt in der Entfernung d hinter der Hauptebene, die Projektionsplatte π (Brennweite f) ist unter dem Winkel $90^\circ - \alpha$ gegen die Waagerechte geneigt. Das auf den Schirm projizierte Bild soll von dem Punkt O_1 des Zuschauerraumes (Entfernung e von der Hauptebene des Schirmes, Höhe h über dem Projektionszentrum O_2) aus den perspektiv richtigen Eindruck machen.

In bezug auf das eingezeichnete x-y-z-Achsensystem haben die beiden Zentren O_1 und O_2 die Koordinaten

$$O_1(0, -e, h) \qquad \text{und} \qquad O_2(0, d, 0);$$

die Gleichung der Projektionsebene π und der Schirmfläche F^2 lauten

$$\pi: \quad y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha + f - d \cdot \cos\alpha = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

$$F^2: \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

[4]) Der gleiche Grundsatz findet in der Photogrammetrie Anwendung, wenn bei der Entzerrung der photographischen Aufnahme eines ebenen Geländes dieses mit einem Quadratnetz überdeckt wird und die Karte in das richtig verzerrte Netz eingezeichnet wird.

In der Projektionsebene wird ein rechtwinkliges $\bar{x}$-$\bar{y}$-Achsenkreuz benutzt, dessen Anfangspunkt der Plattenmittelpunkt ist, wobei die $\bar{x}$-Achse Höhenlinie und die $\bar{y}$-Achse Fallinie ist. Der Zusammenhang zwischen den Plattenpunkten $(\bar{x}, \bar{y})$ und den zugehörigen Schirmpunkten $(X\,Y\,Z)$ ist dann durch

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= f\frac{X}{Z\cdot\sin a+(d-Y)\cos a}, \qquad \bar{y}=f\frac{Z\cdot\cos a-(d-Y)\sin a}{Z\cdot\sin a+(d-Y)\cos a} \\ \text{mit} \quad & b^2X^2+a^2Y^2-a^2b^2=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

gegeben. Der Kernpunkt K, in dem der Projektionsstrahl $O_1\,O_2$ zum Zuschauerauge die Platte durchstößt, hat die Koordinaten

$$\bar{x}_\varkappa=0, \qquad \bar{y}_\varkappa=-f\frac{(e+d)\sin a-h\cos a}{(e+d)\cos a+h\sin a} \quad \ldots \quad (7).$$

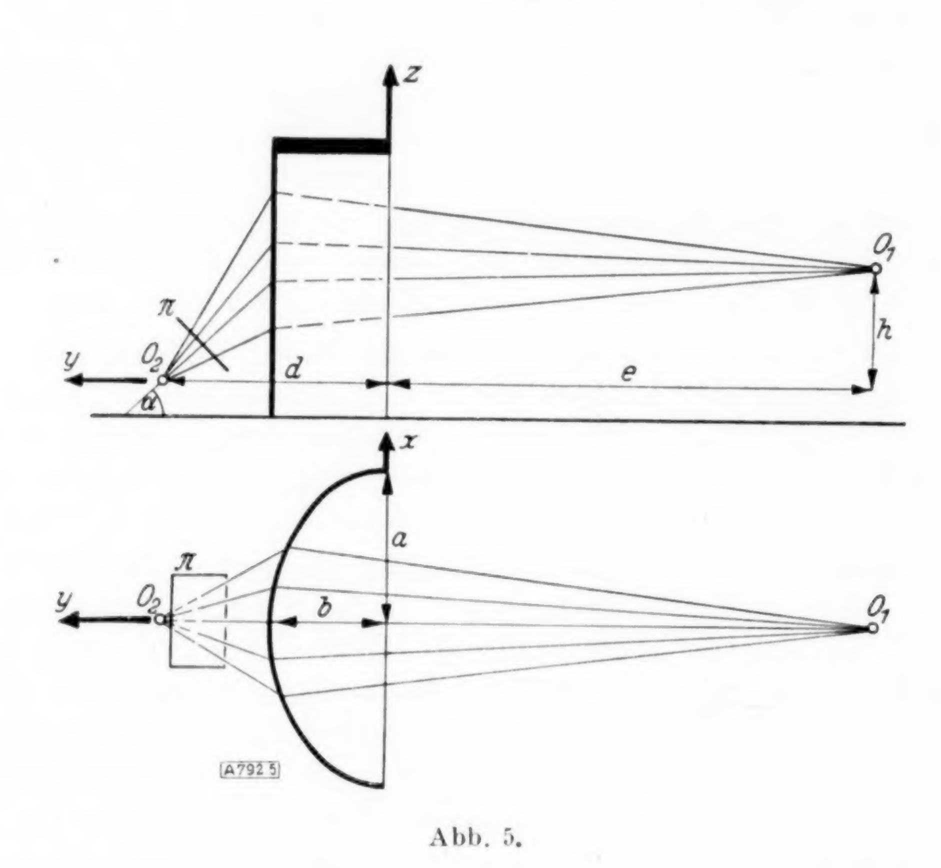


Abb. 5.

Das Fundamentalgebilde f^2, das der Platte durch den Projektionsvorgang aufgeprägt wird, ist in dasjenige Geradenpaar zerfallen, in dem das Tangentialebenenpaar von O_2 an den Schirmzylinder die Plattenebene schneidet. Die Gleichung der beiden Geraden lautet

$$\bar{y}=\mp\frac{\sqrt{d^2-b^2}}{a\sin a}\bar{x}+f\cdot\operatorname{ctg} a \quad \ldots \quad (8);$$

diese beiden Geraden schneiden einander in dem absoluten Punkte

$$\bar{x}_0=0, \qquad \bar{y}_0=f\cdot\operatorname{ctg} a \quad \ldots \quad (9).$$

Der Vergleich mit den oben entwickelten allgemeinen Formeln (1), (2) und (3) ergibt das Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ der Fundamentalform (1): die Metrik ist singulär und zwar vom dual-pseudoeuklidischen Typ.

Ein quadratischer Raster (ξ, ζ), der in der Hauptsymmetrieebene des elliptischen Zylinders aufgebaut ist $(\xi = x,\ \zeta = z)$, bildet sich in das Kurvennetz zweier geraden Kreisreihen dieser dual-pseudoeuklidischen Metrik ab. Irgendein Rasterpunkt (ξ, ζ) hat zum Bildpunkt auf dem Schirm den Punkt[5])

$$\left.\begin{aligned} X &= -\lambda\,\xi, \qquad Y=-e\,(1+\lambda), \qquad Z=h-\lambda\,(\zeta-h) \\ \text{mit} \quad \lambda &= \frac{-a^2e^2\,(+)\,a\,b\sqrt{a^2e^2-e^2\xi^2+\xi^2b^2}}{\xi^2b^2+a^2e^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

[5]) Da nur auf einen Halbzylinder projiziert wird, kommt bei λ das eingeklammerte Vorzeichen nicht in Betracht.

und zum Projektionspunkt auf der Platte den Punkt

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= f \cdot \frac{-\lambda \cdot \xi}{h \sin a + (e+d) \cos a + \lambda \{(h-\zeta) \sin a + e \cos a\}}, \\ \bar{y} &= f \cdot \frac{h \cos a - (e+d) \sin a + \lambda \{(h-\zeta) \cos a - e \sin a\}}{h \sin a + (e+d) \cos a + \lambda \{(h-\zeta) \sin a + e \cos a\}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Für die Rastergeraden $\xi =$ konst. wird auch $\lambda = \lambda(\xi) =$ konst.; die Bilder auf der Projektionsplatte sind wieder Gerade und haben die Gleichung

$$\bar{y} = \frac{d + e(1+\lambda)}{\lambda \cdot \xi \cdot \sin a} \cdot \bar{x} + f \cdot \operatorname{ctg} a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Diese Geraden sind jeweils der eine Teil eines in ein (absolutes) Geradenpaar zerfallenen dual-pseudoeuklidischen Kreises; sie gehen — in Übereinstimmung mit den allgemeinen Überlegungen — durch den absoluten Punkt $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$.

Für die Rastergeraden $\zeta =$ konst. werden die Gleichungen ihrer verzerrten Bilder durch Elimination von ξ und λ aus (10) und (11) gewonnen. Es sind Ellipsen der Form

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{(\bar{y} - \bar{y}_m)^2}{\bar{b}^2} = 1, \quad \text{wobei} \quad \bar{a}^2 = \frac{a^2 e^2 f^2}{B}, \quad \bar{b}^2 = \frac{a^2 e^2 f^2}{B} \cdot \frac{A}{B}, \quad \bar{y}_m = \frac{C}{B}; \\ &A = \frac{b^2}{a^2} \{\zeta (e+d) - d h\}^2 \\ &B = e^2 (\zeta \sin a + d \cos a)^2 - b^2 \{(h-\zeta) \sin a + e \cos a\}^2 \\ &C = f \cdot [e \{e \zeta d - b^2 (h-\zeta)\} \cos 2a + \frac{1}{2} \{e^2 (\zeta^2 - d^2) + b^2 (e^2 - (h-\zeta)^2)\} \sin 2a]\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

ist. Als Kreise der singulären Metrik auf der Projektionsplatte berühren diese (euklidischen) Ellipsen das absolute Geradenpaar (8); da auf einen Halbzylinder projiziert wird, kommt als Bildkurve nur der dem absoluten Punkt zugewandte Bogen von Berührungspunkt bis Berührungspunkt in Betracht. Der Rasterpunkt

$$\xi_\varkappa = 0, \qquad \zeta_\varkappa = \frac{h d}{e + d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

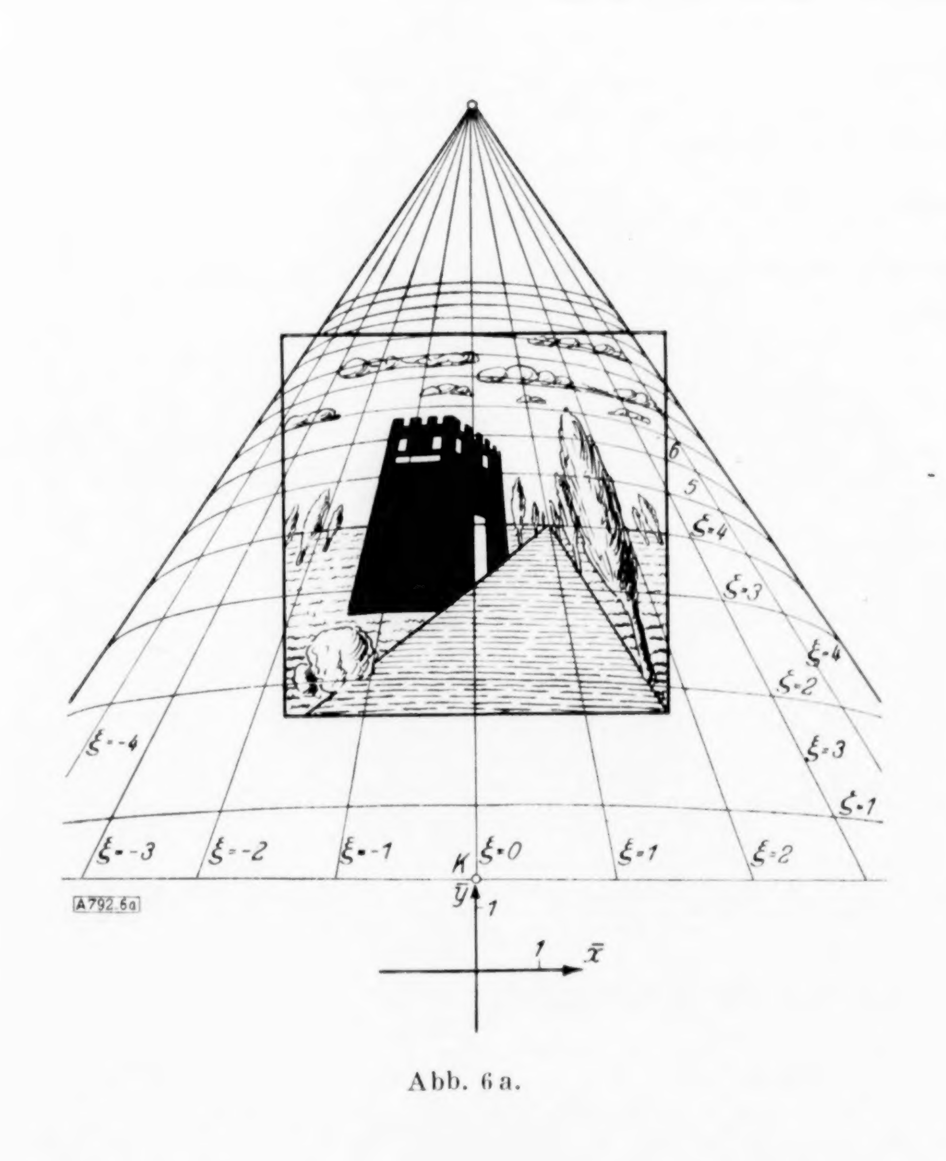


Abb. 6a.

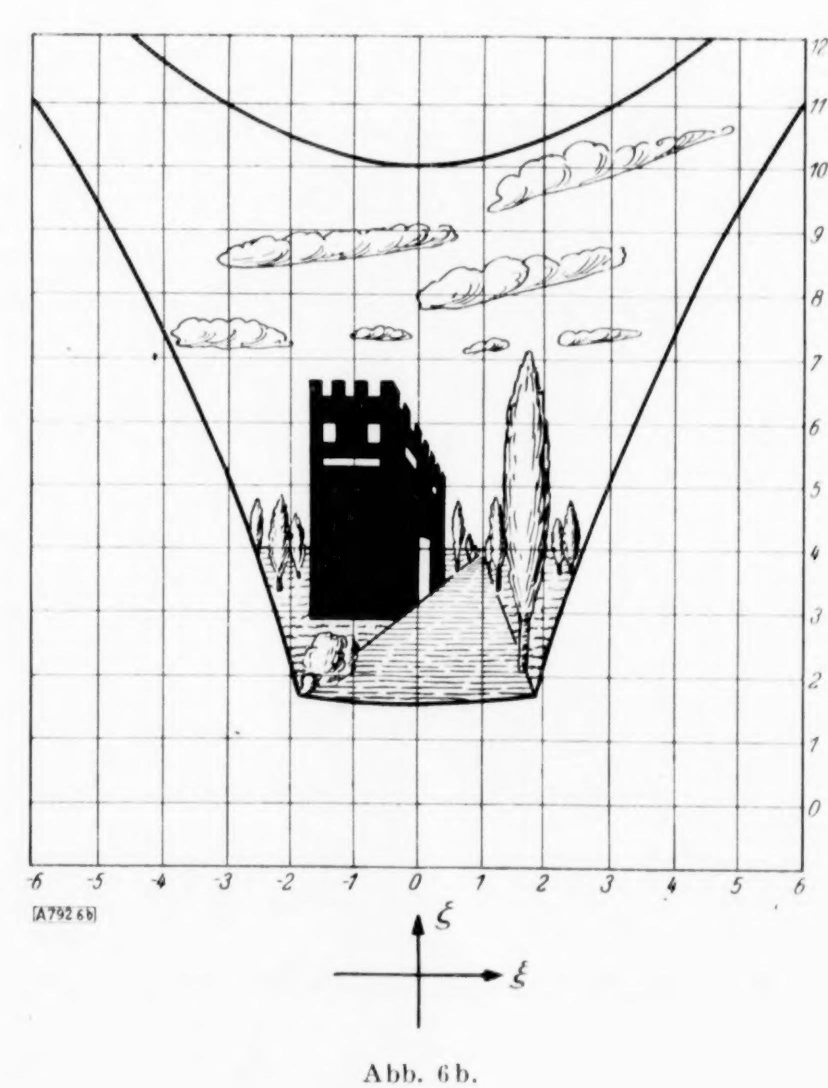


Abb. 6b.

besitzt als Plattenpunkt den Kernpunkt K; das (elliptische) Bild der Rastergeraden $\zeta = \zeta_\varkappa$ ist daher in die (doppelt zählende) Gerade $\bar{y} = \bar{y}_\varkappa$ entartet.

Abb. 6a zeigt das nach den vorstehenden Formeln gefundene verzerrte Rasternetz auf der Projektionsplatte, Abb. 6b das Raster selbst. In beiden Bildern ist ein Haus einskizziert, das somit von einem Betrachter O_1 des Zuschauerraumes aus perspektiv richtig auf dem Rundhorizont gesehen wird. Dem Rasterentwurf liegen folgende Daten zugrunde:

$\alpha = 45^\circ$, π: 18 cm × 18 cm, $f = 20$ cm

$a = 6$ m, $b = 3$ m, $d = 7$ m, $e = 40$ m, $h = 4$ m.

2. Projektion auf einen zylindrischen Rundhorizont. In Abb. 7 ist derjenige Fall skizziert, bei dem auf denselben, durch einen elliptischen Zylinder angenäherten Rundhorizont von vorn und zwar oben vom Schnürboden aus projiziert wird. Die in [1] entwickelten Formeln ändern sich bei der neuen Lage des Projektionszentrums O_2 wie folgt ab:

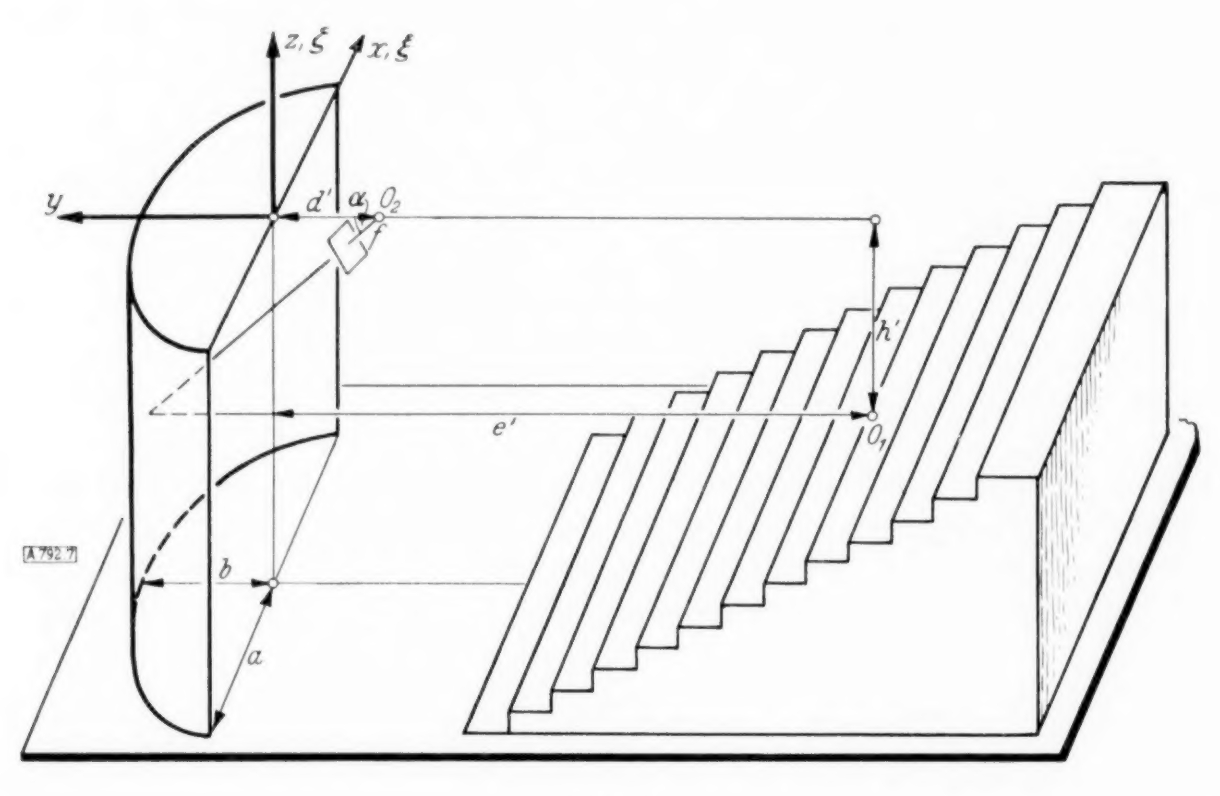


Abb. 7.

Nach Abb. 7 haben die beiden Zentren die Koordinaten

$$O_1\,(0, -e', -h') \qquad \text{und} \qquad O_2\,(0, -d', 0).$$

Ein Plattenpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ in bezug auf ein wie oben bestimmtes $\bar{x}$-$\bar{y}$-Achsenkreuz und ein Schirmpunkt (X, Y, Z) sind durch die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} = f \cdot \frac{X}{-Z \cdot \sin\alpha + (d' + Y)\cos\alpha}, \qquad \bar{y} = f \cdot \frac{Z \cdot \cos\alpha + (d' + Y)\sin\alpha}{-Z\sin\alpha + (d' + Y)\cos\alpha} \\ &\text{mit} \\ &\qquad b^2 X^2 + a^2 Y^2 - a^2 b^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6')$$

verknüpft. Der Kernpunkt $K(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ hat die Koordinaten

$$\bar{x}_k = 0, \qquad \bar{y}_k = f \cdot \frac{(e' - d')\sin\alpha + h'\cos\alpha}{(e' - d')\cos\alpha - h'\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7').$$

Das Fundamentalgebilde auf der Projektionsplatte ist das Geradenpaar mit den Gleichungen

$$\bar{y} = \mp \frac{\sqrt{d'^2 - b^2}}{a \cdot \sin\alpha}\,\bar{x} - f \cdot \operatorname{ctg}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8'),$$

der Schnittpunkt dieser beiden absoluten Geraden hat die Koordinaten

$$\bar{x}_0 = 0, \qquad \bar{y}_0 = -f \cdot \operatorname{ctg}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9').$$

Das absolute Geradenpaar ist konjugiert imaginär, zusammenfallend, reell verschieden, je nachdem das Projektionszentrum O_2 im Inneren des Schirmzylinders, auf ihm oder in seinem Äußeren liegt. Die Metrik in π ist somit dual-euklidisch ($d' < b$), zweifach singulär ($d' = b$) oder dual-pseudoeuklidisch ($d' > b$). Bei dem hier gewählten Beispiel liegt die Lichtquelle im Inneren ($d' < b$); die Metrik ist dual-euklidisch.

Irgendein Punkt (ξ, ζ) des wieder in der Hauptsymmetrieebene des Schirmzylinders aufgebauten ξ-ζ-Rasters hat als Bild auf der Platte den Punkt

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= f \cdot \frac{-\lambda\,\xi}{h' \sin\alpha - (e' - d')\cos\alpha + \lambda\,\{(h'+\zeta)\sin\alpha - e'\cos\alpha\}}, \\ \bar{y} &= -f \cdot \frac{h'\cos\alpha + (e'-d')\sin\alpha + \lambda\,\{(h'+\zeta)\cos\alpha + e'\sin\alpha\}}{h'\sin\alpha - (e'-d')\cos\alpha + \lambda\,\{(h'+\zeta)\sin\alpha - e'\cos\alpha\}} \\ \text{mit} \quad \lambda &= \frac{-a^2 e'^2 (\mp)\, a\, b \sqrt{a^2 e'^2 - e'^2 \xi^2 + \xi^2 b^2}}{\xi^2 b^2 + a^2 e'^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (11').$$

Die Rastergeraden $\xi = \text{konst.}$ sind wie in [1] Gerade (als Teile je eines in ein absolutes Geradenpaar zerfallenen dual-euklidischen Kreises) durch den absoluten Punkt; ihre Gleichung lautet

$$\bar{y} = \frac{d' - e'(1+\lambda)}{\lambda\,\xi\sin\alpha} \cdot \bar{x} - f \cdot \operatorname{ctg}\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12').$$

Die Rastergeraden $\zeta = \text{konst.}$ bilden sich ab in Kegelschnitten der Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{(\bar{y} - \bar{y}_m)^2}{\bar{b}^2} = 1 \quad \text{mit} \quad \bar{a}^2 = \frac{a^2 e'^2 f^2}{B}, \qquad \bar{b}^2 = \frac{a^2 e'^2 f^2}{B} \cdot \frac{A}{B}, \qquad \bar{y}_m = \frac{C}{B}; \\ &A = \frac{b^2}{a^2}\{\zeta(e' - d') - d' h'\}^2, \\ &B = e'^2(-\zeta\sin\alpha + d'\cos\alpha)^2 - b^2\{(h'+\zeta)\sin\alpha - e'\cos\alpha\}^2, \\ &C = -f \cdot \left[e'\{-e'\zeta d' + b^2(h'+\zeta)\}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\{e'^2(\zeta^2 - d'^2) + b^2(e'^2 - (h'+\zeta)^2\}\sin 2\alpha\right] \end{aligned}\right\} \quad (13').$$

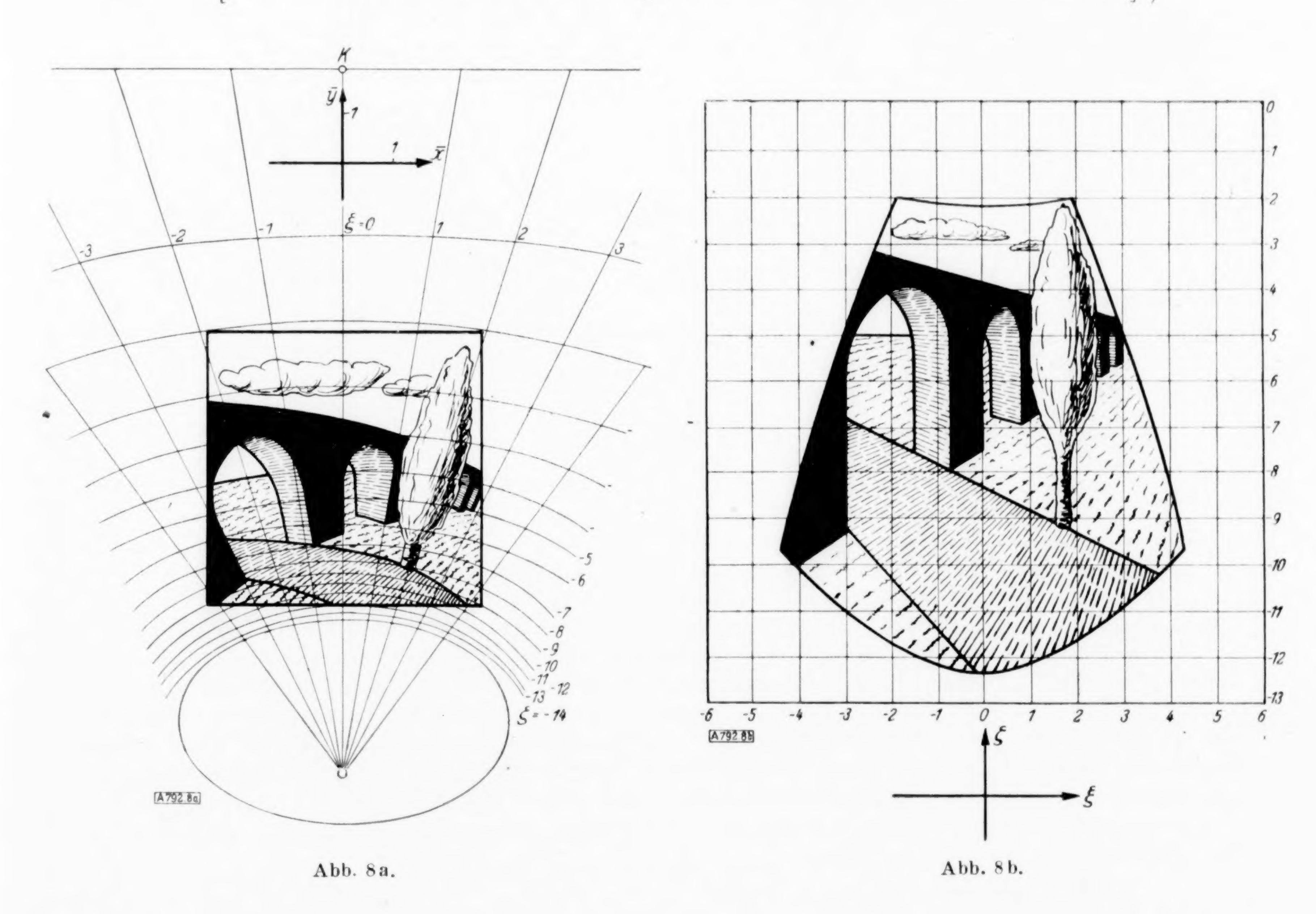


Abb. 8a. Abb. 8b.

Alle diese Kegelschnitte haben (als Kreise der dual-euklidischen Metrik) das konjugiert imaginäre absolute Geradenpaar (8') zu Tangenten.

Der Rasterpunkt

$$\xi_k = 0\,, \qquad \zeta_k = \frac{h'\,d'}{e' - d'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14')$$

hat zum Bilde den Kernpunkt K; das Bild der Rastergeraden $\zeta = \zeta_k$ ist daher die doppelt zählende Gerade $\bar{y} = \bar{y}_k$.

Abb. 8a zeigt die Projektionsplatte mit dem verzerrten Rasternetz und einem Motiv, das unverzerrt, also so, wie es bei der Projektion der Zuschauer in O_1 auf dem Rundhorizont sieht, in Abb. 8b gezeichnet ist. Dem Verzerrungsentwurf liegen folgende Daten zugrunde:

$$\alpha = 45^{\circ}, \qquad \pi : 18\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}\,, \qquad f = 20\,\text{cm}\,,$$

$$a = 6\,\text{m}\,, \qquad b = 3\,\text{m}\,, \qquad d' = 2\,\text{m}\,, \qquad e' = 40\,\text{m}\,, \qquad h' = 5\,\text{m}\,.$$

3. Projektion auf einen Kuppelhorizont. Der Rundhorizont besteht aus einem zylindrischen unteren Teil mit einer aufgesetzten Kuppel (vgl. Abb. 1); ein solcher festgemauerter Projektionsschirm wird im Theater des Volkes, Berlin, benutzt. Auf diesen Rundhorizont wird von zwei Stellen O_2 und $\overline{O}_2$ aus projiziert, die an den beiden Seiten des Horizontes symmetrisch zu seiner Mittellinie liegen. Wegen dieser symmetrischen Lage zeigen beide Projektionsplatten nach Vertauschung von links und rechts dieselben Verzerrungen; die Symmetrielinie auf dem Rundhorizont liefert auf beiden Platten eine Trennlinie. Nur auf der einen Seite dieser Trennlinie ist das verzerrte Netz zu benutzen, da die eine Hälfte des Rundhorizontes von dem einen, die andere von dem andern Projektionsapparat angestrahlt wird. Die sorgfältige Markierung des Trennlinienbildes auf beiden Platten bürgt dafür, daß die beiden Projektionsbilder auf dem Rundhorizont richtig und ohne Überdeckung aneinanderpassen.

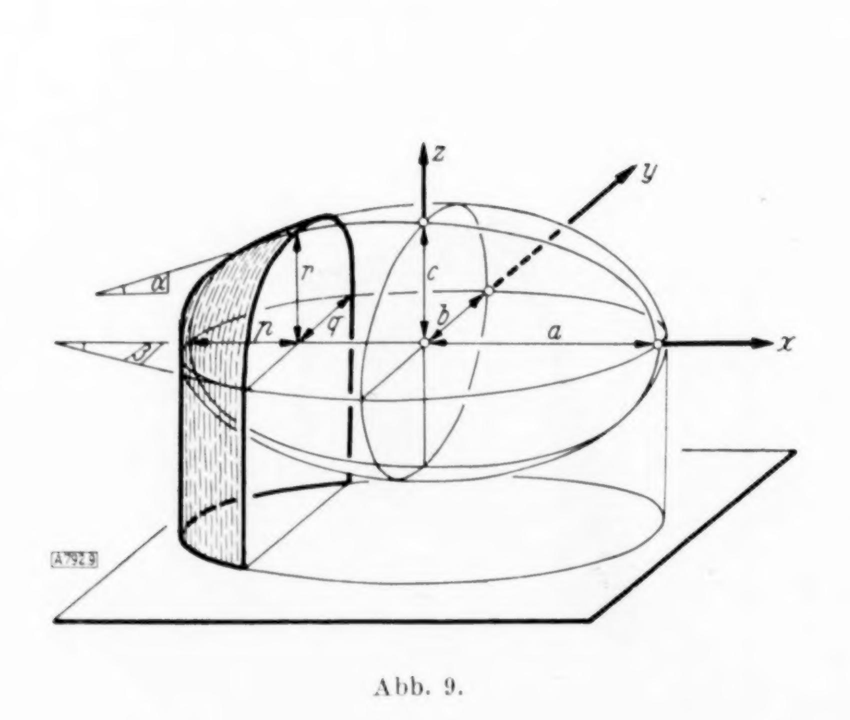


Abb. 9.

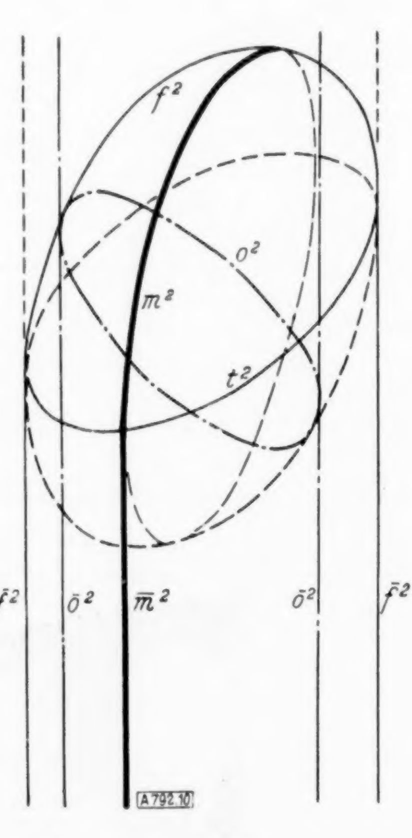


Abb. 10.

Ein solcher aus Zylinderteil und Kuppelteil bestehender Rundhorizont läßt sich aus zwei Flächen zweiter Ordnung in der Weise zusammensetzen, wie es Abb. 9 zeigt: an ein dreiachsiges Ellipsoid wird berührend ein elliptischer Zylinder gesetzt; ein Teil dieses Flächenpaares bildet dann den Rundhorizont. Der Berührungskegelschnitt der beiden Flächenteile ergibt als Bild auf beiden Platten jeweils einen Trennkegelschnitt t^2; dieser Kegelschnitt ist die Grenze zwischen den beiden Plattenteilen, auf deren erstem die durch den elliptischen Zylinder und auf deren zweitem die durch das Ellipsoid bestimmte Metrik gilt. Abb. 10 zeigt den Entwurf für eine solche Platte.

Der Zylinder prägt als ausgeartete Fläche zweiter Ordnung der Platte ein singuläres Fundamentalgebilde auf, das wie in den vorstehend behandelten Fällen dual-euklidisch oder dual-pseudoeuklidisch ist. Das absolute Geradenpaar $\bar{f}^2$ erscheint als euklidisches Parallelenpaar, da die Projektionsplatte parallel zur Zylinderachse liegt. Eine lotrechte Rastergerade $\zeta =$ konst. hat zum Bilde ein zu $\bar{f}^2$ paralleles Geradenpaar $\overline{m}^2$, von dem jedoch nur eine Gerade in Betracht zu ziehen ist, da nur auf dem einen, dem Zuschauer abgewandten Teil des Zylinders projiziert wird. Diese Gerade $\overline{m}^2$ hat auf der Platte bis zu ihrem Schnittpunkt mit dem Trennkegelschnitt t^2 Gültigkeit.

Jenseits dieses Trennkegelschnittes ist die Metrik auf der Platte durch das Ellipsoid festgelegt. Sein von O_2 ausgehender Berührungskegel schneidet die Projektionsplatte in einem nichtsingulären Kegelschnitt f^2; eine zu ihm als Fundamentalgebilde gehörende Maßbestimmung ist somit ebenfalls nicht-singulär, und zwar — je nach der Lage von O_2 — elliptisch oder hyperbolisch. Nach Bestimmung des Orthogonalkreises o^2 lassen sich demnach auf der Platte die Geradenbilder als diejenigen Kreise dieser nichteuklidischen Metrik festlegen, die o^2 orthogonal schneiden. Das Geradenbild $\overline{m}^2$ geht im Trennkegelschnittt t^2 berührend in den Bogen eines solchen nichteuklidischen Kreises über. Er erscheint euklidisch gesehen als Ellipsenbogen, der sich mit genügender Genauigkeit durch seinen Krümmungskreis annähern läßt.

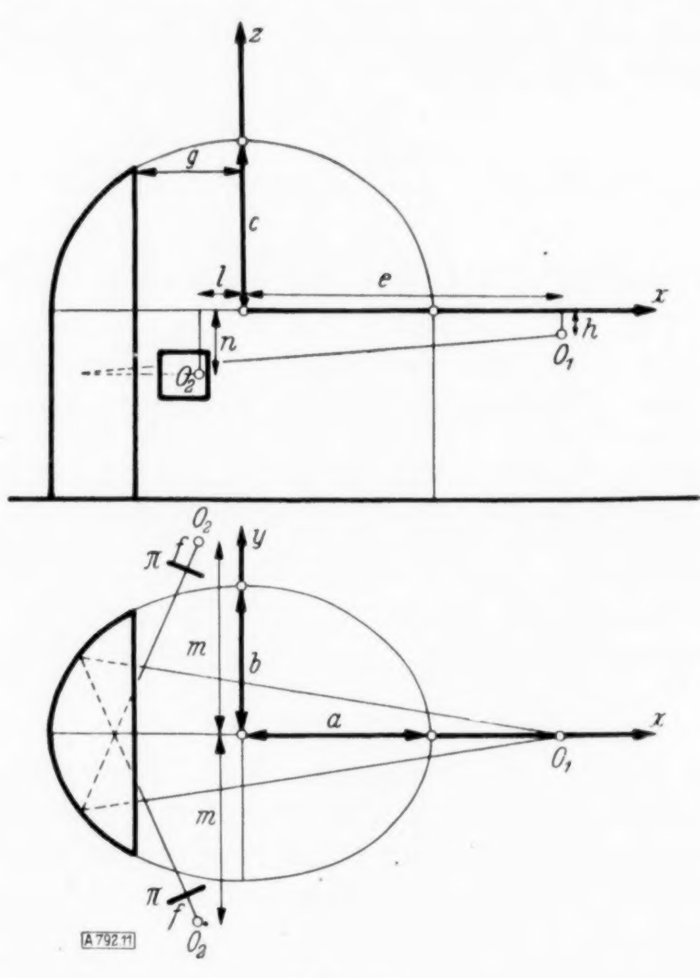


Abb. 11.

In Abb. 11 ist ein Rundhorizont der geschilderten Art in Grund- und Aufriß dargestellt. Die beiden Projektionszentren O_2 haben in bezug auf das eingezeichnete Achsenkreuz die Koordinaten

$$O_2(-l, \pm m, \pm n),$$

das Sehzentrum im Zuschauerraum ist

$$O_1(e, 0, -h).$$

Wegen der Symmetrielage der beiden Projektionszentren zur Achse des Theaterraumes sind die Verzerrungen auf den beiden Projektionsplatten ebenfalls symmetrisch; die folgenden Rechnungen sind nur für eine solche Platte [an der Stelle $O_2(-l, -m, -n)$] durchgeführt.

Die Gleichung dieser Projektionsebene π lautet:

$$\pi\colon \quad (x+l)\cos\varphi - (y+m)\sin\varphi + f = 0 \quad \ldots\ldots \quad (15),$$

wobei φ der (spitze) Winkel des Hauptsehstrahles mit der x-Achse ist. Dieser Hauptsehstrahl trifft die Projektionsplatte in ihrem Mittelpunkt

$$O\begin{cases} x = -l - f\cos\varphi \\ y = -m + f\sin\varphi \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

O ist der Anfangspunkt eines $\bar{y}$-$\bar{z}$-Achsenkreuzes auf der Platte: die $\bar{y}$-Achse verläuft waagerecht, die $\bar{z}$-Achse lotrecht. Ein Raumpunkt (x, y, z) hat zum Bilde auf der Projektionsplatte den Punkt mit den Koordinaten

$$\bar{y} = -f \cdot \frac{(x+l)\sin\varphi + (y+m)\cos\varphi}{x+l}, \qquad \bar{z} = -f \cdot \cos\varphi \cdot \frac{z+n}{x+l} \quad . \; . \; . \; . \quad (17).$$

Der Rundhorizont ist aus Teilen des dreiachsigen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18a)$$

und des dieses Ellipsoid längs der Hauptellipse $z = 0$ berührendem elliptischen Zylinders

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18b)$$

zusammengesetzt. Das Bild der Berührungsellipse ist der Trennkegelschnitt t^2 auf der Bildplatte; seine Gleichung ergibt sich aus

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und (17) zu

$$b^2 (l\bar{z} + f\,n\cos\varphi)^2 + a^2 (n\,\bar{y} - m\,\bar{z} + f\,n\sin\varphi)^2 = a^2\,b^2\,\bar{z}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19).$$

Dieser Kegelschnitt trennt auf der Bildplatte die Gebiete der beiden Metriken, die von dem Ellipsoid einerseits, dem elliptischen Zylinder andererseits aufgeprägt werden.

Das Fundamentalgebilde f^2 der ersten Maßbestimmung ergibt sich als Schnitt der Projektionsebene mit dem Tangentialkegel vom Projektionszentrum $O_2(-l, -m, -n)$ aus an das Ellipsoid (18a); die Gleichung von f^2 wird demnach aus dem System

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{l\,x}{a^2} + \frac{m\,y}{b^2} + \frac{n\,z}{c^2} + 1 = 0$$

und (17) durch Elimination von x, y, z gewonnen. Der Orthogonalkreis o^2 des für die Geradenbilder in Betracht kommenden linearen Kreissystems ist das Bild desjenigen Kegelschnitts, längs dessen der vom Zuschauerauge O_1 ausgehende Tangentialkegel an das Ellipsoid dieses berührt. Die Gleichung von o_2 ergibt sich demnach aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{e\,x}{a^2} - \frac{h\,z}{c^2} - 1 = 0$$

und (17) wieder durch Elimination von x, y, z.

In gleicher Weise wird das Fundamentalgebilde $\bar{f}^2$ der zweiten, durch den elliptischen Zylinder aufgeprägten Maßbestimmung aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{l\,x}{a^2} + \frac{m\,y}{b^2} + 1 = 0$$

und (17), der zugehörige Orthogonalkreis $\bar{o}^2$ aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{e\,x}{a^2} - 1 = 0$$

und (17) durch Elimination von x, y, z bestimmt. $\bar{f}^2$ und $\bar{o}^2$ sind je in Geradenpaare zerfallen.

Diese Kegelschnitte f^2, o^2 und $\bar{f}^2, o^2$ sowie t^2 dienen zur Kontrolle der verzerrten Bildkurven eines quadratischen η-ζ-Rasters, das wie früher in die den Rundhorizont abschließende Ebene $x = -g$ gelegt wird. Der vom Zuschauerauge $O_1(e, 0, -h)$ ausgehende Sehstrahl durch einen Rasterpunkt (η, ζ) trifft den Rundhorizont in dem Punkte (X, Y, Z), wobei

$$X = e - \lambda(e + g)\,, \qquad Y = \lambda \cdot \eta\,, \qquad Z = \lambda\zeta - h(1 + \lambda) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

ist. λ ist durch die Bedingung

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

bestimmt, je nachdem der Sehstrahl den kuppelförmigen oder den zylindrischen Teil des Rundhorizontes trifft. Durch die Formeln (17) ist dann der Bildpunkt $(\bar{y}, \bar{z})$ des Schirmpunktes (X, Y, Z) festgelegt.

Besonders sorgfältig muß auf der Platte die Trennlinie festgelegt werden, die den für die Projektion gültigen Plattenbereich abgrenzt. Ihre genaue Markierung gewährleistet das glatte Aneinanderpassen der beiden Projektionsbilder auf dem Schirm. Die Trennlinie ist das Bild des Symmetrieschnittes $y = 0$ mit dem Rundhorizont. Nach (17) und (18b) wird die Trennlinie für den zylindrischen Schirmteil die Gerade

$$\bar{y}_* = f\frac{(l - a) \cdot \sin\varphi + m \cdot \cos\varphi}{a - l} \quad \ldots\ldots \quad (22),$$

nach (17) und (18a) wird entsprechend die Trennlinie für den ellipsoidischen Schirmteil der Kegelschnitt

$$c^2\{l\,\bar{y} + f(m \cdot \cos\varphi + l \cdot \sin\varphi)\}^2 + a^2\{m\,\bar{z} - n\,\bar{y} - f\,n\sin\varphi\}^2 = a^2 c^2 \{\bar{y} + f\sin\varphi\}^2 \quad (23).$$

Beide Kurven gehen berührend an der Stelle

$$\bar{z}_* = \frac{n}{m}(\bar{y}_* + f\sin\varphi) = \frac{f\,n\cos\varphi}{a - l} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

ineinander über. Der Grenzpunkt $(\bar{y}_*, \bar{z}_*)$ liegt auf dem Trennkegelschnitt t^2 (19).

Bei den vorstehenden Überlegungen war der Rundhorizont durch ein dreiachsiges Ellipsoid und den zugehörigen Zylinder festgelegt; zur Bestimmung dienten die drei Halbachsenlängen a, b, c. Aus dem Grundriß und dem Schnitt eines Rundhorizontes lassen sich nicht diese Größen unmittelbar abgreifen, sondern die in Abb. 9 eingezeichneten Strecken p, q, r sowie die beiden Winkel α und β. Aus p, q, r und α ergeben sich die Werte a^2, b^2, c^2 des Ellipsoides zu

$$a^2 = p^2\frac{(r - p\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2}{(r - 2\,p\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2}\,; \qquad b^2 = q^2\frac{(r - p\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2}{r\,(r - 2\,p\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\,; \qquad c^2 = r\frac{(r - p\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2}{(r - 2\,p\,\mathrm{tg}\,\alpha)} \quad . . \quad (25).$$

Der Winkel β ergibt sich aus

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{q}{r} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (26);$$

der Vergleich dieses errechneten Wertes mit dem aus einem Schnitt des Rundhorizontes gemessenen Wert liefert eine Kontrolle für die Richtigkeit der Annahme eines Ellipsoid-Rundhorizontes.

Für das Theater des Volkes in Berlin, für das die folgenden Verzerrungen durchgeführt sind, sind die betreffenden gemessenen Werte

$$p = 16{,}0\,\mathrm{m}\,, \qquad q = 17{,}9\,\mathrm{m}\,, \qquad r = 11{,}0\,\mathrm{m}\,, \qquad \alpha = 17^\circ, \qquad \beta = 26^\circ.$$

Die Kontrollformel (26) bestätigt, wie gut die Annahme eines Ellipsoid-Rundhorizontes dem wirklichen Rundhorizont gerecht wird. Die Halbachsenlängen des Ellipsoides ergeben sich nach (25) zu

$$a = 80{,}0\,\mathrm{m}\,, \qquad b = 29{,}6\,\mathrm{m}\,, \qquad c = 18{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

Kommt die Annahme einer elliptischen Kuppel der Wirklichkeit nicht nahe, so kann man, wie in Abb. 12 skizziert, den Kuppelteil des Rundhorizontes durch eine Hyperboloidschale annähern. Die Änderung der vorstehend aufgestellten Formeln läßt sich für diesen Fall leicht verfolgen.

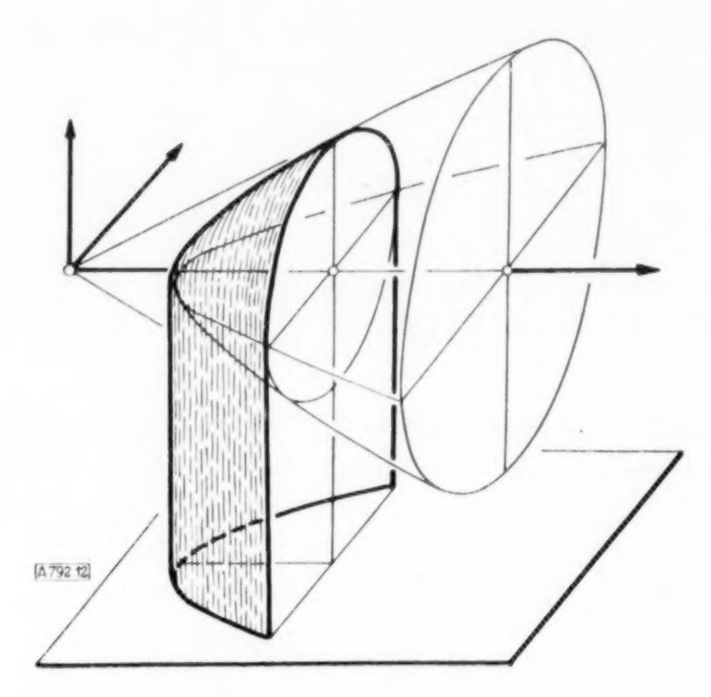


Abb. 12.

Die so aufgezeigte rechnerische Herstellung eines Rasters läßt sich z. T. mit Hilfe der Photographie durch unmittelbare Konstruktion ersetzen. Abb. 13a, b zeigt ein Plattenpaar

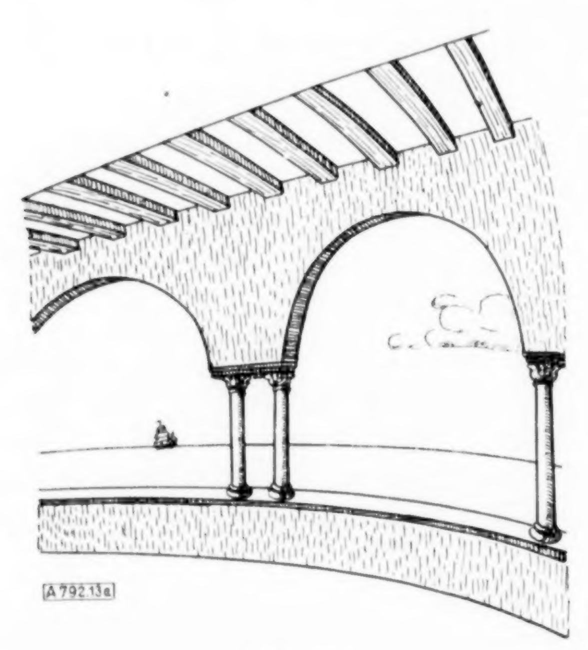


Abb. 13a.

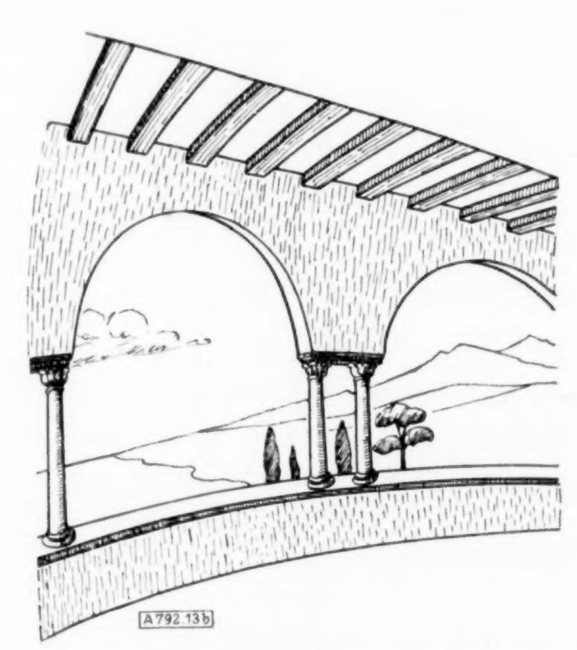


Abb. 13b.

(Originalformat jeder Platte 18 cm × 18 cm) für den in Abb. 11 (Theater des Volkes, Berlin) dargestellten Rundhorizont; in Abb. 14 ist das durch diese beiden Platten projizierte Bühnen-

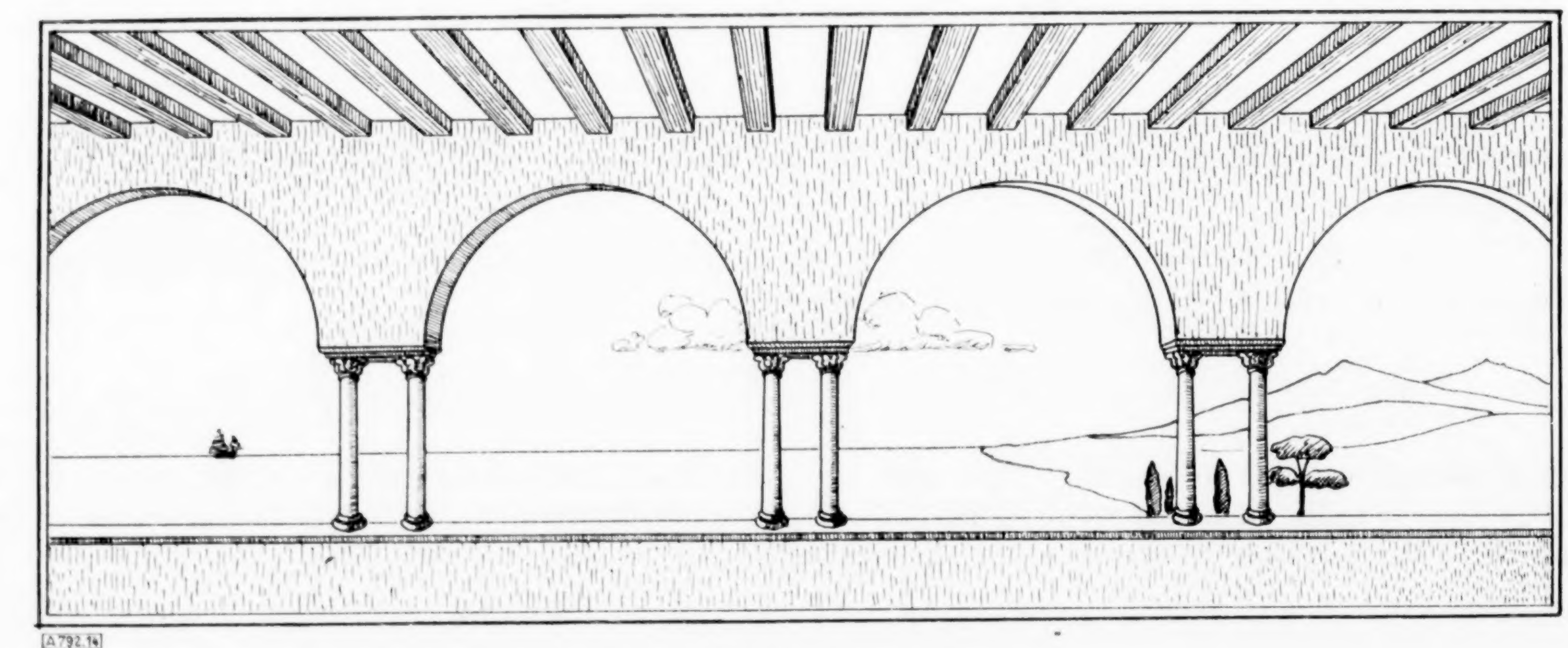


Abb. 14.

bild, wie es vom Zuschauer gesehen wird, wiedergegeben. Auf diese Weise lassen sich verhältnismäßig schnell und genau die verzerrten Platten für perspektiv richtig wirkende Bildentwürfe zu jedem Rundhorizont herstellen. 792

KLEINE MITTEILUNGEN

Zwei Bemerkungen zum Abbildungssatz von Schwarz-Christoffel. In vielen Lehrbüchern wird der Abbildungssatz von Schwarz-Christoffel nur für den Fall dargestellt, daß das Innere eines ganz im Endlichen gelegenen Polygons auf die Halbebene bzw. auf das Innere des Kreises abgebildet wird. Da für die Anwendung auch die Fälle wichtig sind, daß das Äußere eines im Endlichen gelegenen Polygons oder „das Innere" eines Polygonzuges, der durch den unendlich fernen Punkt hindurchgeht, abgebildet wird, ist es wohl berechtigt, den Satz auch für diese Fälle einmal zu formulieren. Auf den Beweis, der ganz entsprechend geführt werden kann, wie der bei Hurwitz-Courant (Funktionentheorie, 3. Aufl. (1929), S. 423) angegebene, soll nicht eingegangen werden. Über den abzubildenden Polygonzug wird nur vorausgesetzt, daß er ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet. Dabei kann es eintreten, daß zwei oder mehrere Eckpunkte oder zwei Seiten des Polygonzuges Π zusammenfallen, daß also Selbstberührungen, aber keine Selbstüberschneidungen eintreten. Für das Folgende soll beim Umlauf um Π jede Durchlaufung eines solchen Eckpunktes bzw. einer solchen Seite als besonderer Eckpunkt bzw. als besondere Seite zählen.

I. Die n Eckpunkte des ganz im Endlichen der ζ-Ebene gelegenen Polygons Π mögen auf die reellen Punkte $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ der z-Ebene abgebildet werden. Wir durchlaufen den Rand von Π so, daß das abzubildende Gebiet (also das Innere bzw. das Äußere von Π) zur Linken liegt und bezeichnen die Richtungsänderung beim Passieren des k-ten Eckpunktes mit α_k (Winkel zählen im Uhrzeigersinn negativ). $(-\pi \leqq \alpha_k < +\pi)$ (Abb. 1).

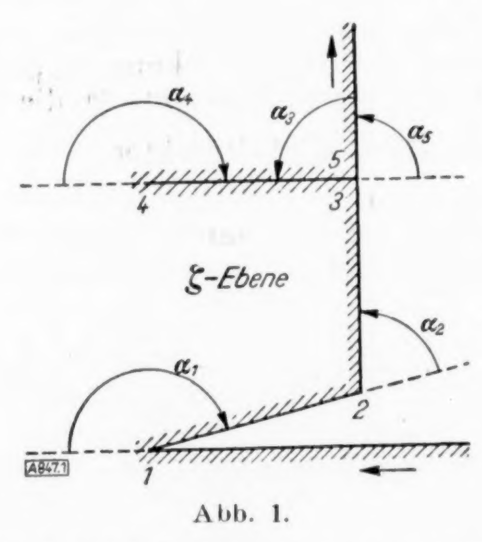


Abb. 1.

Dann lautet (mit 2 beliebigen komplexen Konstanten C und C_1)

a) die Abbildung des Inneren von Π auf die obere Halbebene

$$\zeta = C\int_0^z (t-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \ldots (t-a_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}\, dt + C_1$$

$$\text{mit } \sum_1^n \alpha_k = 2\pi,$$

b) die Abbildung des Äußeren von Π auf die obere Halbebene

$$\zeta = C\int_0^z (t-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \ldots (t-a_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} (t-A)^{-2}(t-\bar{A})^{-2}\, dt + C_1$$

$$\text{mit } \sum_1^n \alpha_k = -2\pi.$$

Dabei ist $z = A = a + bi$ der Bildpunkt des Punktes $\zeta = \infty$ und $z = \bar{A} = a - bi$ sein Spiegelbild an der reellen Achse.

II. Wir betrachten einen Polygonzug der ζ-Ebene mit n im Endlichen gelegenen Ecken, der m mal durch den Punkt $\zeta = \infty$ hindurchgeht, sich dort also $(m-1)$ mal selbst berührt. Diesen m Punkten sollen die m reellen Punkte $b_1 < b_2 < \ldots < b_m$ der z-Ebene entsprechen. Die Reihenfolge der Punkte a_k und b_k auf der reellen Achse ist durch die Anordnung der entsprechenden Punkte auf dem Polygonzug gegeben. Das Polygon Π zerlegt die ζ-Ebene in 2 einfach zusammenhängende Gebiete, von denen wir dasjenige, das wir abbilden wollen, als das Äußere von Π bezeichnen wollen.

Die Richtungsänderung bei der k-ten Passierung des Punktes $\zeta = \infty$ (wenn man das Polygon Π so durchläuft, daß das Äußere zur Linken liegt), bezeichnen wir mit β_k $(-\pi \leqq \beta_k \leqq +\pi)$. Dann lautet die Abbildungsfunktion:

$$\zeta = C\int_0^z (t-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \ldots (t-a_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} (t-b_1)^{\frac{\beta_1}{\pi}-2} \ldots (t-b_m)^{\frac{\beta_m}{\pi}-2}\, dt + C_1$$

(C und C_1 sind willkürliche komplexe Konstanten). Dabei besteht die Bedingung:

$$\sum_1^m \beta_k = \sum_1^n \alpha_k + (m-1)\cdot 2\pi \quad \ldots \quad (1).$$

Zur Bestimmung der Winkel β_k bilden wir am besten das Polygon Π auf die ζ'-Ebene mit der Funktion $\zeta' = \frac{R^2}{\zeta}$ ab und bestimmen die Winkel im Punkt $\zeta' = 0$. Dabei wird R zweckmäßig so groß gewählt, daß alle im Endlichen gelegenen Eckpunkte von Π im Innern des Kreises $|\zeta| = R$ liegen (Abb. 2).

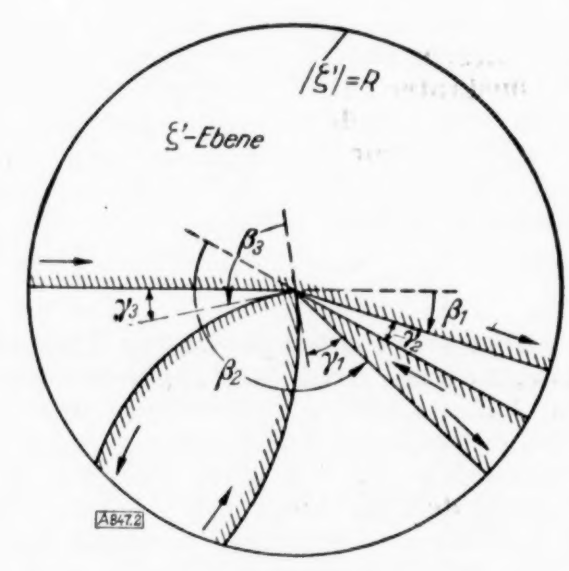


Abb. 2.

Bezeichnen wir mit $\sum \gamma_k = l\cdot\pi$ $(0 \leqq l \leqq 2)$ die Summe aller Winkel, die in der ζ'-Ebene in der Umgebung des Punktes $\zeta' = 0$ nicht zum Äußeren des Polygons gehören, so gilt

$$\sum \gamma_k + \sum_1^m (\pi - \beta_k) = 2\pi,$$

also

$$\sum_1^m \beta_k = (l + m - 2)\cdot\pi \quad \ldots \quad (2).$$

Dann folgt aus Gl. (1) die Gleichung

$$\sum_1^n \alpha_k = (l - m)\cdot\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Beziehungen (2) und (3) lassen sich zur Kontrolle verwenden.

Durch eine lineare Transformation in der z-Ebene können wir die angegebenen Formeln so abändern, daß dem j-ten Eckpunkt bzw. der k-ten Durchlaufung des Punktes $\zeta = \infty$ der Punkt $z = \infty$ entspricht. Die so entstandenen Formeln unterscheiden sich von den angegebenen durch das Fehlen des Faktors

$$(t - a_j)^{-\frac{\alpha_j}{\pi}} \text{ bzw. } (t - b_k)^{+\frac{\beta_k}{\pi} - 2}.$$

Von den $N + 1$ Konstanten (Fall I: $N = n$; Fall II: $N = n + m$) $a_j, b_k, |C|$, wozu im Fall Ib noch die beiden Parameter a und b kommen, kann man drei beliebig vorgeben. Die übrigen $N - 2$ sind dann durch die Abmessungen des abzubildenden Polygons bestimmt. Denn ein N-Eck ($N \geq 3$) hängt nach Vorgabe der Winkel noch von ($N - 2$) Parametern ab, z. B. von den Längen von ($N - 2$) Seiten. Statt der Längen von zwei aufeinanderfolgenden Seiten kann man als Parameter auch den Abstand des Anfangspunktes der ersten vom Endpunkt der zweiten Seite und die Richtung der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte wählen, statt der Längen von drei aufeinanderfolgenden Seiten den Abstand des Anfangspunktes der ersten vom Endpunkt der dritten Seite, die Richtung der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte und den Abstand der zweiten Seite vom Anfangspunkt der ersten. Die zuletzt angegebenen Parameter wird man vor allem im Fall II wählen, wo man nicht mehr von Seitenlängen sprechen kann. Im Fall Ib kommt noch die Bedingung dazu, daß das Polygon geschlossen ist, daß also das Residuum des Integranden an der Stelle $z = A$ Null sein muß, was zwei weitere Bedingungen ergibt. Die Konstante C_1 und das Argument von C werden dann noch so gewählt, daß einem bestimmten Punkt der z-Ebene und einer bestimmten Richtung in diesem Punkt ein bestimmter Punkt der ζ-Ebene und eine bestimmte Richtung in diesem Punkt entsprechen. Die Berechnung der Konstanten führt im allgemeinen auf ein System von transzendenten Gleichungen, deren explizite Auflösung nur in speziellen Fällen möglich ist, so daß die praktische Anwendung des Abbildungssatzes viel Mühe macht.

Göttingen. W. Mangler. 847

Eine analytisch durchgeführte Ableitung der Kreispunkts- und Mittelpunktskurve.

In diesem Aufsatz soll die Ableitung der Kreispunkts- und Mittelpunktskurve mittels Rechnen mit komplexen Zahlen durchgeführt werden, welche Darstellungsart dem Ingenieur, der ja mit den Grundlagen der konformen Abbildung vertraut ist, mehr liegt als eine rein geometrische Überlegung.

Die Problemstellung ist folgende: Vier komplane Lagen einer Ebene sind gegeben; ein Punkt dieser Ebene wird sich im Laufe der Lageänderungen mit vier fixen Punkten decken, die im allgemeinen nicht auf einem Kreis liegen. Es sind jene ausgezeichneten Punkte der lageverändernden Ebene zu suchen, bei denen die obgenannten Fixpunkte auf einem Kreis liegen. Nach Burmester ist dieser geometrische Ort die Kreispunktkurve (in der bewegten Ebene gelegen). Die Mittelpunkte der schon erwähnten Kreise liegen auf der Mittelpunktskurve (in der festen Ebene)[1].

[1] Burmester: Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1880, Seite 616 u. f.

In die lageverändernde Ebene E sei ein Koordinatensystem x, y gelegt (Abb. 1). Ein Punkt

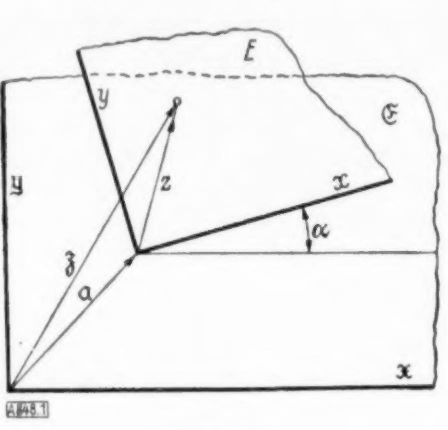


Abb. 1.

dieser Ebene ist durch den Ortsvektor $z = x + i y$ bestimmt[2]). In der festen Ebene $\mathfrak{E}$ ist dieser Punkt durch den Ortsvektor $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y}$ festgelegt. Nimmt die bewegte Ebene die Lagen E_n für $n = 1, 2, 3, 4$ ein, so ist der Punkt $z = x + i y$ in der Ebene $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{x}_n + i\,\mathfrak{y}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) bestimmt. Der Ortsvektor des Koordinatenursprunges von E_n in der Ebene $\mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{a}_n$, die x-Achse von E_n schließt mit $\mathfrak{x}$ den Winkel α_n ein. Es ist sonach

$$\mathfrak{z}_n = \mathfrak{a}_n + \mathfrak{e}_n\, z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wenn $\mathfrak{e}_n = e^{i\alpha_n}$; e ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Für die Lage E_m gilt: $\mathfrak{z}_m = \mathfrak{a}_m + \mathfrak{e}_m\, z$. Durch Elimination von z läßt sich ein linearer Zusammenhang zwischen $\mathfrak{z}_m$ und $\mathfrak{z}_n$ herstellen ($m = 1, 2, 3, 4$; $n = 1, 2, 3, 4$; $m \neq n$)

$$\mathfrak{z}_n = \frac{\mathfrak{e}_n}{\mathfrak{e}_m}(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{a}_m) + \mathfrak{a}_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

$\mathfrak{z}_n$ ist also eine ganze lineare Funktion von $\mathfrak{z}_m$, die im allgemeinen eine Drehstreckung, in diesem Falle aber nur eine Drehung bedeutet, da die Veränderliche $\mathfrak{z}_m$ mit einem Einheitsvektor $\frac{\mathfrak{e}_n}{\mathfrak{e}_m} = e^{i(\alpha_n - \alpha_m)}$ multipliziert wird.

Der Drehpol der Lagenänderung ist der selbstentsprechende Punkt der Verwandtschaft und ergibt sich aus

$$\mathfrak{z}_m = \mathfrak{z}_n = \mathfrak{p}_{mn} = -\frac{\mathfrak{a}_n\,\mathfrak{e}_m - \mathfrak{a}_m\,\mathfrak{e}_n}{\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n} \quad . \quad . \quad (3).$$

Mit $\mathfrak{p}_{mn} = \mathfrak{a}_n + \mathfrak{e}_n\, p_{mn}$ oder $\mathfrak{p}_{mn} = \mathfrak{a}_m + \mathfrak{e}_m\, p_{mn}$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{-\mathfrak{a}_n + \dfrac{\mathfrak{a}_n\,\mathfrak{e}_m - \mathfrak{a}_m\,\mathfrak{e}_n}{\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n}}{\mathfrak{e}_n} \\ \text{und} \quad p_{mn} &= -\frac{\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_n}{\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4),$$

der Ortsvektor des Drehpoles in der Ebene E.

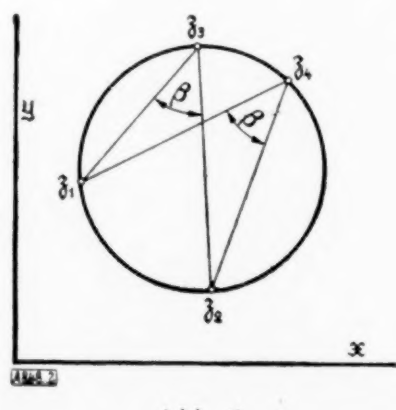


Abb. 2.

Sollen vier Punkte $\mathfrak{z}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$), die zu einem Punkt z gehören (Abb. 2), auf einem Kreis liegen, so muß

$$\sphericalangle\, \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_3 \mathfrak{z}_2 = \sphericalangle\, \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_4 \mathfrak{z}_2 = \beta,$$

$$\arg(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_3) - \arg(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3) = \beta = \arg\frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3}$$

und

$$\arg(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_4) - \arg(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_4) = \beta = \arg\frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_4}{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_4}$$

sein, das heißt

$$\frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3} = K_1 \cdot e^{i\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5\text{a}),$$

$$\frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_4}{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_4} = K_2\, e^{i\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5\text{b}).$$

Für die konjugiert Komplexe gilt:

$$\frac{\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_3}{\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_3} = K_1\, e^{-i\beta} \quad . \; . \; . \; . \quad (6\text{a}),$$

$$\frac{\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_4}{\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_4} = K_2\, e^{-i\beta} \quad . \; . \; . \; . \quad (6\text{b}).$$

Dividiert man 5a durch 6a und 5b durch 6b, so erhält man

$$\frac{(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_3)(\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_3)}{(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3)(\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_3)} = e^{2i\beta}$$

und

$$\frac{(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_4)(\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_4)}{(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_4)(\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_4)} = e^{2i\beta},$$

daraus

$$\frac{(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_3)(\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_3)}{(\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_3)(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3)} = \frac{(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_4)(\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_4)}{(\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_4)(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_4)} \quad . \; . \quad (7).$$

Zum weiteren Auswerten der Gl. 7 soll die Differenz $\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_n$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_n &= \mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_n + \mathfrak{e}_m z - \mathfrak{e}_n z \\ &= (\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n)\left(\frac{\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_n}{\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n} + z\right) \\ &= (\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n)(z - p_{mn}). \end{aligned}$$

Die konjugiert Komplexe ist

$$\bar{\mathfrak{z}}_m - \bar{\mathfrak{z}}_n = (\bar{\mathfrak{e}}_m - \bar{\mathfrak{e}}_n)(\bar{z} - \bar{p}_{mn}).$$

Da $\mathfrak{e}_m = e^{i\alpha_m}$ ist, so lautet

$$\bar{\mathfrak{e}}_m = e^{-i\alpha_m} = \frac{1}{\mathfrak{e}_m} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{e}}_n = \frac{1}{\mathfrak{e}_n} \quad . \; . \quad (8)$$

und

$$\bar{\mathfrak{z}}_m - \bar{\mathfrak{z}}_n = -\frac{\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n}{\mathfrak{e}_m\, \mathfrak{e}_n}(\bar{z} - \bar{p}_{mn}).$$

Daraus errechnet sich

$$\frac{\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_n}{\bar{\mathfrak{z}}_m - \bar{\mathfrak{z}}_n} = -\mathfrak{e}_m \cdot \mathfrak{e}_n \frac{(z - p_{mn})}{(\bar{z} - \bar{p}_{mn})}.$$

Werden für m und n die entsprechenden Indizes gewählt und in Gl. 7 eingesetzt, so ergibt sich nach einer kleinen Umformung

$$\frac{(z - p_{13})(z - p_{24})}{(\bar{z} - \bar{p}_{13})(\bar{z} - \bar{p}_{24})} = \frac{(z - p_{14})(z - p_{23})}{(\bar{z} - \bar{p}_{14})(\bar{z} - \bar{p}_{23})} \quad . \quad (9).$$

Werden die Klammern ausmultipliziert, so folgt:

$$\frac{z^2 - (p_{13} + p_{24})\, z + p_{13}\, p_{24}}{\bar{z}^2 - (\bar{p}_{13} + \bar{p}_{24})\, \bar{z} + \bar{p}_{13}\, \bar{p}_{24}} = \frac{z^2 - (p_{14} + p_{23})\, z + p_{14}\, p_{23}}{\bar{z}^2 - (\bar{p}_{14} + \bar{p}_{23})\, \bar{z} + \bar{p}_{14}\, \bar{p}_{23}}$$

oder

$$\frac{(p_{14} + p_{23} - p_{13} - p_{24})\, z + p_{13}\, p_{24} - p_{14}\, p_{23}}{(\bar{p}_{14} + \bar{p}_{23} - \bar{p}_{13} - \bar{p}_{24})\, \bar{z} + \bar{p}_{13}\, \bar{p}_{24} - \bar{p}_{14}\, \bar{p}_{23}} = \frac{z^2 - (p_{13} + p_{24})\, z + p_{13}\, p_{24}}{\bar{z}^2 - (\bar{p}_{13} + \bar{p}_{24})\, \bar{z} + \bar{p}_{13}\, \bar{p}_{24}}.$$

Man sieht, daß nach Ausmultiplizieren der Brüche kein Produkt von z und $\bar{z}$ in einer höheren als der dritten Potenz vorkommt. Die Kreispunktkurve ist somit dritten Grades.

Wird die Gl. 9 in der Form

$$\frac{(z - p_{13})(\bar{z} - \bar{p}_{14})}{(z - p_{14})(\bar{z} - \bar{p}_{13})} = \frac{(z - p_{23})(\bar{z} - \bar{p}_{24})}{(z - p_{24})(\bar{z} - \bar{p}_{23})} = e^{2i\gamma} \quad (10)$$

angeschrieben (siehe Gl. 7), so ergibt sich die bekannte Eigenschaft der Kreispunktkurve, daß aus jedem Punkt derselben je zwei Pole, in deren Indizes eine gemeinsame Zahl vorkommt, unter gleichem Winkel erscheinen.

Nach vorangegangener Erörterung ist die Kreispunktkurve durch vier Pole bestimmt. Zwischen den vier Lagen von E sind aber $\binom{4}{2} = 6$ Pole vorhanden. Diese sind:

$$p_{12} = -\frac{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{e}_2 - \mathfrak{e}_1}, \qquad p_{23} = -\frac{\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_2},$$

$$p_{13} = -\frac{\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_1}, \qquad p_{24} = -\frac{\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_2},$$

$$p_{14} = -\frac{\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_1}, \qquad p_{34} = -\frac{\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_3}{\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_3}.$$

Sind vier Pole gegeben, so sind die vier Lagen von E noch nicht eindeutig bestimmt. Die restlichen Pole sind aber nicht mehr frei wählbar. Es soll nun für p_{34} der geometrische Ort bestimmt werden:

$$\left.\begin{aligned} p_{34} &= -\frac{\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_3}{\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_3} = \frac{(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1) - (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1)}{(\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_1) - (\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_1)}(-1) \\ p_{34} &= \frac{(\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_1)\, p_{14} - (\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_1)\, p_{13}}{(\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_1) - (\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_1)} \end{aligned}\right\} (11\text{a})$$

oder

$$\left.\begin{aligned} -\frac{(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2) - (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2)}{(\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_2) - (\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_2)} &= p_{34} \\ = \frac{(\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_2)\, p_{24} - (\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_2)\, p_{23}}{(\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_2) - (\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_2)} & \end{aligned}\right\} . \; . \; (11\text{b}).$$

Mit $\frac{\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_1}{\mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_1} = g$ ergibt sich nach kurzer Rechnung aus 11a $g\,(p_{13} - p_{34}) = (p_{14} - p_{34})$, die konjugiert Komplexe ist $\bar{g}\,(\bar{p}_{13} - \bar{p}_{34}) = (\bar{p}_{14} - \bar{p}_{34})$. Außerdem kann $\bar{g}$ durch g ausgedrückt werden:

$$\bar{g} = \frac{\bar{\mathfrak{e}}_3 - \bar{\mathfrak{e}}_1}{\bar{\mathfrak{e}}_4 - \bar{\mathfrak{e}}_1} = \frac{\frac{1}{\mathfrak{e}_3} - \frac{1}{\mathfrak{e}_1}}{\frac{1}{\mathfrak{e}_4} - \frac{1}{\mathfrak{e}_1}} = \frac{(\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_3)}{(\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_4)} \cdot \frac{\mathfrak{e}_4}{\mathfrak{e}_3}; \quad \bar{g} = g\,\frac{\mathfrak{e}_4}{\mathfrak{e}_3}\,(12).$$

Dies eingesetzt, gibt nach einer Division durch die konjugiert Komplexe

$$\frac{\mathfrak{e}_3}{\mathfrak{e}_4} = \frac{(\bar{p}_{34} - \bar{p}_{13}) \cdot (p_{34} - p_{14})}{(p_{34} - p_{13}) \cdot (\bar{p}_{34} - \bar{p}_{14})}.$$

Aus 11b errechnet sich

$$\frac{\mathfrak{e}_3}{\mathfrak{e}_4} = \frac{(\bar{p}_{34} - \bar{p}_{23})(p_{34} - p_{24})}{(p_{34} - p_{23})(\bar{p}_{34} - \bar{p}_{24})}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\frac{\mathfrak{e}_3}{\mathfrak{e}_4}$ ergibt sich nach einer Umformung

$$\frac{(p_{34} - p_{13})(\bar{p}_{34} - \bar{p}_{14})}{(\bar{p}_{34} - \bar{p}_{13})(p_{34} - p_{14})} = \frac{(p_{34} - p_{23})(\bar{p}_{34} - \bar{p}_{24})}{(\bar{p}_{34} - \bar{p}_{23})(p_{34} - p_{24})} \quad (13).$$

Gl. (13) stimmt formal mit Gl. 10 überein. Es muß also der neugewählte Pol auf der Kreispunktkurve liegen. Es ergibt sich der bekannte Satz, daß Kreispunktskurve und Pollagenkurve identisch sind. Diese Rechnung mit p_{12} durchgeführt, zeitigt dasselbe Resultat.

Wird Gl. (7) in der Form

$$\frac{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4}{\bar{\mathfrak{z}}_1\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_1\bar{\mathfrak{z}}_4 - \bar{\mathfrak{z}}_2\bar{\mathfrak{z}}_3 + \bar{\mathfrak{z}}_3\bar{\mathfrak{z}}_4} = \frac{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4}{\bar{\mathfrak{z}}_1\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_2\bar{\mathfrak{z}}_4 - \bar{\mathfrak{z}}_1\bar{\mathfrak{z}}_3 + \bar{\mathfrak{z}}_3\bar{\mathfrak{z}}_4}$$

angeschrieben und Zähler von Zähler, sowie Nenner von Nenner subtrahiert, so ergibt sich nach einer Umformung

$$\frac{(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_3)(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_4)}{(\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_3)(\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_4)} = \frac{(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_4)(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3)}{(\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_4)(\bar{\mathfrak{z}}_2 - \bar{\mathfrak{z}}_3)} = \frac{(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2)(\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{z}_3)}{(\bar{\mathfrak{z}}_1 - \bar{\mathfrak{z}}_2)(\bar{\mathfrak{z}}_4 - \bar{\mathfrak{z}}_3)}.$$

Diese Art der Darstellungsweise folgt auch daraus, daß man drei Paare von Punkten als Scheitel der Peripheriewinkel wählen kann. Wird zum Beispiel im ersten und dritten Teil dieser Doppelgleichung $\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_n$ substituiert, so erscheint die Kreispunktkurvengleichung in der Form

$$\frac{(z - p_{13})(z - p_{24})}{(\bar{z} - \bar{p}_{13})(\bar{z} - \bar{p}_{24})} = \frac{(z - p_{12})(z - p_{34})}{(\bar{z} - \bar{p}_{12})(\bar{z} - \bar{p}_{34})} \quad (14).$$

Nach früher Gesagtem gilt auch zum Beispiel $z = p_{14}$ und

$$\frac{(p_{14} - p_{13})(p_{14} - p_{24})}{(\bar{p}_{14} - \bar{p}_{13})(\bar{p}_{14} - p_{24})} = \frac{(p_{14} - p_{12})(p_{14} - p_{34})}{(\bar{p}_{14} - \bar{p}_{12})(\bar{p}_{14} - \bar{p}_{34})}.$$

Sind nun in dieser Gleichung alle Pole bis auf p_{12} gegeben, so muß dieser auf einer Geraden liegen, da ja

$$(p_{14} - p_{12})\bar{K} = (\bar{p}_{14} - \bar{p}_{12})K \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ist[2]).

Es kann zusammenfassend gesagt werden: sind die Pole $p_{13}, p_{24}, p_{14}, p_{23}$ gegeben, so kann p_{12} oder p_{34} auf der Pollagenkurve beliebig angenommen werden: Ist zum Beispiel p_{34} gewählt, so ist auch p_{12} bestimmt, da er sowohl auf der Pollagenkurve, als auch auf der Geraden 15 liegen muß.

Zur Ableitung der Mittelpunktskurve soll zunächst der geometrische Ort der Mittelpunkte $\mathfrak{w}$ jener Kreise festgelegt werden, die durch zwei Punkte $\mathfrak{z}_m$ und $\mathfrak{z}_n$ gehen.

Es muß $|\mathfrak{z}_m - \mathfrak{w}| = |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{w}|$ oder $(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{w})(\bar{\mathfrak{z}}_m - \mathfrak{w}) = (\mathfrak{z}_n - \mathfrak{w})(\bar{\mathfrak{z}}_n - \bar{\mathfrak{w}})$ gelten. (Das heißt, der Abstand $\overline{\mathfrak{z}_m \mathfrak{w}}$ ist gleich $\overline{\mathfrak{z}_n \mathfrak{w}}$.) Diese Gleichung umgeformt lautet: $\frac{\mathfrak{z}_m - \mathfrak{w}}{\bar{\mathfrak{z}}_n - \bar{\mathfrak{w}}} = \frac{\mathfrak{z}_n - \mathfrak{w}}{\bar{\mathfrak{z}}_m - \bar{\mathfrak{w}}} = \frac{\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_n}{\bar{\mathfrak{z}}_n - \bar{\mathfrak{z}}_m}$. Dies ist eine in $\mathfrak{w}$ lineare Gleichung und stellt eine Gerade dar, $\mathfrak{w}$ ist ein Punkt der Streckensymmetrale von $\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_n$. Wird $\mathfrak{z}_m$ und $\mathfrak{z}_n$ aus Gl. (2) substituiert, so folgt

$$\frac{\mathfrak{a}_m + \mathfrak{e}_m z - \mathfrak{w}}{\bar{\mathfrak{a}}_n + \bar{\mathfrak{e}}_n \bar{z} - \bar{\mathfrak{w}}} = \frac{\mathfrak{a}_n + \mathfrak{e}_n z - \mathfrak{w}}{\bar{\mathfrak{a}}_m + \bar{\mathfrak{e}}_m \bar{z} - \bar{\mathfrak{w}}} = A \quad . \quad (16).$$

[2]) Bieberbach: Funktionentheorie, Teubners technische Leitfäden, Bd 14, 1922.

Subtrahiert man die Zähler sowie die Nenner voneinander, so erhält man

$$A = -\frac{\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_n + z(\mathfrak{e}_m - \mathfrak{e}_n)}{\bar{\mathfrak{a}}_m - \bar{\mathfrak{a}}_n + \bar{z}(\bar{\mathfrak{e}}_m - \bar{\mathfrak{e}}_n)},$$

und mit Gl. (4) und (8)

$$A = \mathfrak{e}_m \mathfrak{e}_n \cdot \frac{z - p_{mn}}{\bar{z} - \bar{p}_{mn}}.$$

Wird in Gl. (16) der erste Teil mit $\frac{\bar{\mathfrak{e}}_m}{\mathfrak{e}_n}$, der zweite mit $\frac{\bar{\mathfrak{e}}_n}{\mathfrak{e}_m}\left(\frac{\bar{\mathfrak{e}}_m}{\mathfrak{e}_n} = \frac{\bar{\mathfrak{e}}_n}{\mathfrak{e}_m}\text{, siehe Gl. (8)}\right)$ multipliziert, so ergibt sich

$$\frac{A}{\mathfrak{e}_m \mathfrak{e}_n} = \frac{\mathfrak{a}_m \bar{\mathfrak{e}}_m + z - \mathfrak{w}\bar{\mathfrak{e}}_m}{\bar{\mathfrak{a}}_n \mathfrak{e}_n + \bar{z} - \bar{\mathfrak{w}}\mathfrak{e}_n} = \frac{\mathfrak{a}_n \bar{\mathfrak{e}}_n + z - \mathfrak{w}\bar{\mathfrak{e}}_n}{\bar{\mathfrak{a}}_m \mathfrak{e}_m + \bar{z} - \bar{\mathfrak{w}}\mathfrak{e}_m}$$

$$= \frac{\mathfrak{a}_m \bar{\mathfrak{e}}_m - \mathfrak{a}_n \bar{\mathfrak{e}}_n - \mathfrak{w}(\bar{\mathfrak{e}}_m - \bar{\mathfrak{e}}_n)}{\bar{\mathfrak{a}}_n \mathfrak{e}_n - \bar{\mathfrak{a}}_m \mathfrak{e}_m - \bar{\mathfrak{w}}(\mathfrak{e}_n - \bar{\mathfrak{e}}_m)}$$

oder, wenn der Zähler mit $\mathfrak{e}_m \mathfrak{e}_n$, der Nenner mit $\bar{\mathfrak{e}}_m \bar{\mathfrak{e}}_n$ und die linke Seite der Gleichung mit $\mathfrak{e}^2_m \mathfrak{e}^2_n$ multipliziert wird,

$$A \cdot \mathfrak{e}_m \mathfrak{e}_n = \frac{\mathfrak{a}_m \mathfrak{e}_n - \mathfrak{a}_n \mathfrak{e}_m - \mathfrak{w}(\mathfrak{e}_n - \mathfrak{e}_m)}{\bar{\mathfrak{a}}_m \bar{\mathfrak{e}}_n - \mathfrak{a}_n \bar{\mathfrak{e}}_m - \bar{\mathfrak{w}}(\bar{\mathfrak{e}}_n - \bar{\mathfrak{e}}_m)}.$$

Wird mit Hilfe der Gl. (3) substituiert, so erhält man nach einer kleinen Umformung $A = \frac{\mathfrak{w} - \mathfrak{p}_{mn}}{\bar{\mathfrak{w}} - \bar{\mathfrak{p}}_{mn}}$ und man kommt zur Gleichung

$$\frac{z - p_{mn}}{\bar{z} - \bar{p}_{mn}} = \frac{1}{\mathfrak{e}_m \mathfrak{e}_n} \cdot \frac{\mathfrak{w} - \mathfrak{p}_{mn}}{\bar{\mathfrak{w}} - \bar{\mathfrak{p}}_{mn}} \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Diese gibt einen Zusammenhang zwischen einem Punkt z der beweglichen Ebene in den Stellungen E_m und E_n und den Mittelpunkten jener Kreise, auf deren Umfang z vor und nach der Lagenänderung zu liegen kommen kann. Für drei Lagen erhält man zu 17 eine Bedingung hinzu. Es ist somit $\mathfrak{w}$ schon eindeutig bestimmt. Durch Einbeziehung einer vierten Lage kommen keine grundsätzlich neuen Bedingungen hinzu, da ja im weiteren nur solche z in Betracht kommen, die auf der Kreispunktkurve und daher am Umfang jener Kreise liegen, die schon durch die Stellungen E_1, E_2, E_3 bestimmt sind.

Werden nun die entsprechenden Indizes gewählt und die so entstandenen Ausdrücke (17) in Gl. (8) eingesetzt, so kommt man zu

$$\frac{(\mathfrak{w} - \mathfrak{p}_{13})(\mathfrak{w} - \mathfrak{p}_{24})}{(\bar{\mathfrak{w}} - \bar{\mathfrak{p}}_{13})(\bar{\mathfrak{w}} - \bar{\mathfrak{p}}_{24})} = \frac{(\mathfrak{w} - \mathfrak{p}_{14})(\mathfrak{w} - \mathfrak{p}_{23})}{(\bar{\mathfrak{w}} - \bar{\mathfrak{p}}_{14})(\bar{\mathfrak{w}} - \bar{\mathfrak{p}}_{23})} \quad (18)$$

der Gleichung der Mittelpunktskurve. Sie stimmt formal mit der Kreispunktskurvengleichung überein, nur ist sie nicht durch die Punkte $p_{13}, p_{24}, p_{14}, p_{23}$, sondern durch $\mathfrak{p}_{13}, \mathfrak{p}_{24}, \mathfrak{p}_{14}, \mathfrak{p}_{23}$ gegeben.

Denkt man sich p_{mn} $(m, n = 1, 2, 3, 4, m \neq n)$ in der bewegten Ebene E, $\mathfrak{p}_{mn}$ in der festen Ebene $\mathfrak{E}$ aufgetragen und verfolgt die gegenseitigen Lagen von p_{mn} und $\mathfrak{p}_{mn}$, so stellt man fest, daß sich zum Beispiel in der Lage E_1 alle jene $\mathfrak{p}_{mn}$ und p_{mn} decken, in deren Index $m = 1$ vorkommt. In E_2 ist dies für $m = 2$ der Fall usw. Die Systeme p_{mn} und $\mathfrak{p}_{mn}$ können nicht zur Deckung gebracht werden. Es lassen sich aber Lagenbeziehungen der beiden Systeme aufstellen[3]).

Baden bei Wien. E. Hackmüller. 848

[3]) Rudolf Beyer: Technische Kinematik, Leipzig 1931, Seite 323 u. f.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. habil. KARL **KLOTTER,** Dozent a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Einführung in die technische Schwingungslehre, Bd. I. Einfache Schwinger. VIII + 206 S. m. 208 Abb. i. Text. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 18 M.

Das Klottersche Lehrbuch will in die Schwingungslehre einführen. Sein Ziel ist weniger eine Stoff- oder „Rezepte"-Sammlung zu bieten, als vielmehr die für eine fruchtbare Beschäftigung mit Schwingungsproblemen notwendigen Begriffe klar herauszuarbeiten. Dem dient die sorgfältig durchdachte Systematik und die Beschränkung des Stoffes auf wirklich Wesentliches. Das Werk ist als ein dreibändiges geplant. Der vorliegende erste Band behandelt die Grundbegriffe der Schwingungslehre und die Schwingungen eines Systems von einem Freiheitsgrad, kurz „einläufige Schwinger" genannt. (Der zweite wird die mehrläufigen Schwinger, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Probleme der Maschinentechnik, der dritte die kontinuierlichen Schwinger bringen.) Der Stoff ist wie folgt gegliedert: I. Kinematik des Schwingers. II. Kinetik: Freie ungedämpfte, freie gedämpfte Schwingungen, bei gerader Kennlinie, bei nicht-gerader Kennlinie; erzwungene Schwingungen bei gerader, bei nicht-gerader Kennlinie; Anlaufen, Anfachen. — Zahlreiche Beispiele sorgen für den lebenden Zusammenhang mit den technischen Problemen.

Obwohl „elementar" in bezug auf die vom Leser geforderten Vorkenntnisse mathematischer und mechanischer Natur, hat das Buch durchaus wissenschaftlichen Charakter; d. h. es geht an den in der Problemstellung liegenden Schwierigkeiten an keiner Stelle vorbei, und erwartet vom Leser ernsthafte Mitarbeit. — Ein Werk, das allen, die sich in Schwingungsprobleme einarbeiten wollen, ein zuverlässiger Führer sein wird.

Berlin-Adlershof. Marguerre. 854

Dr.-Ing. KARL **GREIN,** Regierungsbaumeister, Über die Berechnung von Pilzdecken (Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons, Heft XLV). IV + 48 S. m. 24 Abb. Berlin 1937, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 6,60 M.

Der Verfasser hat sich der dankenswerten Aufgabe unterzogen, die zahlreichen Veröffentlichungen zur Theorie der Pilzdecke zusammenzufassen, diese zu erweitern und daraus Vorschläge zur Berechnung des Spannungszustandes bei ihrer Anwendung im Bauwesen zu entwickeln. Dabei wird an Stelle der Einspannung in dem Stützenkopf zunächst Punktstützung angenommen. Um den elastischen Zusammenhang in einfacher Weise wiederzugeben, wird die Biegefläche aus der Biegung $w_1 = w_1\,(y)$ eines durchlaufenden Trägers mit linienförmiger Stützung in den Säulenfluchten und einer Biegung $w_2 = w_2\,(x,\,y)$ der Platte zusammengesetzt, durch welche die linienförmige Stützung in die punktförmige Stützung zurückgeführt wird. Diese wird aus der Einflußfunktion für die Plattenbiegung mit der homogenen Gleichung für den linken und rechten Teilbereich einer freigelagerten Platte entwickelt, welche durch eine Linienbelastung in zwei, bis auf die Singularität der Linienkraft lastfreie Bereiche zerlegt wird. Im Anschluß daran werden die Ansätze für die Querkräfte, für die Biegungs- und Drillungsmomente angegeben. Der Einfluß der Einspannung der Stützen wird nach einer Untersuchung von Tölke geschätzt. Hieran schließen sich zahlreiche Untersuchungen mit wertvollen Unterlagen für die konstruktive Ausgestaltung der Pilzdecke.

Dresden. K. Beyer. 852

Dr. CLEMENS **SCHAEFER,** o. ö. Prof. der Physik a. d. Univ. Breslau, Einführung in die theoretische Physik, 3. Bd. 2. Teil, Quantentheorie. IV + 510 S. m. 88 Fig. i. Text. Berlin und Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 28 M.

Der Band schließt das Gesamtwerk in würdigster Weise ab; alle Vorzüge, die von den andern Bänden her bekannt sind, zeichnen auch den Schlußband aus. Die durchsichtige Einfachheit der Darlegungen, die leichte Faßlichkeit der mathematischen Entwicklungen, nicht zuletzt die Wärme der Darstellung lassen das Buch für jeden, der eine klare Einsicht in die Probleme der Quantentheorie zu erhalten wünscht, namentlich auch für Studierende, als hervorragend geeignet erscheinen. Mit sicherem didaktischen Blick paßt Verf. seine Darstellung den Schwierigkeiten der Probleme an, ohne je zu knapp und damit unverständlich oder zu breit und damit ermüdend zu werden; eine einfache und eindringliche Sprache vermag auch sprödesten Stoff in faßlicher Form zu klarem Verständnis zu bringen. Nach einer kurzen Einleitung, in der das Versagen der älteren Physik bei der Theorie der Strahlung besprochen wird, leitet das erste Kapitel, das von der dualen Natur der Strahlung handelt (Comptoneffekt, Photoeffekt, Schwankungserscheinungen) auf das Hauptthema über und bereitet gleichzeitig schon auf die in der 2. Hälfte behandelte Wellenmechanik vor. Daß genau die Hälfte des Buches der Darstellung der „klassischen" Quantentheorie und des Bohrschen Atommodells gewidmet ist, wird vom Verfasser („da die umfangreiche Erörterung dieser Dinge vom heutigen Standpunkt vielleicht Verwunderung erregen könnte") mit den zugleich den Geist des Werkes kennzeichnenden Worten gerechtfertigt: „ich wollte dem Leser einerseits die große Leistung der Bohrschen Theorie schildern, die in der Entwerfung eines relativ einfachen und anschaulichen Bildes von den Atomvorgängen und der Entstehung der Spektren besteht, anderseits ihn durch Aufzeigen ihrer Schwächen und Mängel überzeugen, daß etwas wirklich Neues kommen mußte. Durch Schilderung dieser Entwicklung wollte ich ihm auch einen Eindruck von dem gewaltigen geistigen Ringen um den Fortschritt der Erkenntnis vermitteln." Die Durchführung dieses Programms ist dem Verf. ausgezeichnet gelungen. Die kritische Einstellung, die die Unzulänglichkeiten der Theorie überall herausstellt, in Verbindung mit der Berücksichtigung der Entwicklungsgeschichte der Quantentheorie — auch durch ständige Hinweise auf die Originalarbeiten — macht einen besonderen Reiz des Buches aus. Die mathematischen Entwicklungen sind ihrem Umfange nach sorgfältig abgewogen. Sie sind durchsichtig, ohne ausführlicher zu werden als unbedingt nötig. Manche Zwischenrechnungen werden dem Leser überlassen; doch hält sich diese gedankliche Mitarbeit immer in den Grenzen, die durch eine nicht nur für Mathematiker bestimmte „Einführung" geboten erscheint. Dankenswert ist es, daß Verf. bei Benutzung von Ergebnissen der früheren Bände sich nicht immer mit Hinweisen auf die betreffenden Stellen begnügt, sondern bei wichtigen Erörterungen die Gedankengänge knapp wiederholt. So wird bei der besonders gut gelungenen Einführung in die Wellenmechanik der Inhalt der Hamiltonschen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Strahlenoptik und klassischer Mechanik in prägnanter Kürze wiedergegeben; im Anschluß an die Darstellung der Heisenbergschen Matrizenmechanik (die in vorbildlicher Kürze und Durchsichtigkeit die Hauptgedanken dieses Verfahrens darbietet) werden die charak-

teristischen Merkmale der Bose-Einsteinschen und der Fermi-Diracschen Statistik aufgezeigt usw. Dadurch erhält das Buch einen abgeschlossenen Charakter, so daß es auch unabhängig von den übrigen Bänden benutzt werden kann. Das Buch schließt mit einer Darstellung der Versuche relativistischer Verallgemeinerung der Wellenmechanik, insbesondere der Diracschen Gleichungen. Theoretische Erörterungen über den Atomkern fehlen — bis auf eine Darlegung der Gamowschen Theorie des α-Zerfalls — ganz, und zwar aus dem für ein einführendes Lehrbuch durchaus verständlichen Grunde, weil eine gesicherte Theorie der Atomkerne trotz einer ganzen Reihe wichtiger experimenteller Befunde sich noch nicht hat aufbauen lassen.

Das Buch ist sorgfältig durchgesehen; nur wenige, meist leicht korrigierbare Druckfehler sind dem Referenten aufgefallen. So kann es als eine ausgezeichnete Darstellung der Quantentheorie auf das wärmste allen denen empfohlen werden, die einen vorsichtigen, zuverlässigen und anregenden Führer in die Probleme dieses Gebietes suchen.

Berlin. E. Mosch. 840

Dr. GRETE **HERMANN,** Bremen, Dr. E. **MAY,** Göttingen, Dr. TH. **VOGEL,** Bad Nauheim, Die Bedeutung der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis. Drei mit dem Richard Avenarius-Preis ausgezeichnete Arbeiten. VIII + 210 S. Leipzig 1937, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 6,50 M.

Die Arbeiten sind Antworten auf die von der Avenariusgesellschaft gestellte Preisfrage: „Welche Konsequenzen haben die Quantentheorie und die Feldtheorie der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis?" Quantenmechanik und Heisenbergsche Unsicherheitsrelationen auf der einen, Gleichzeitigkeitsbegriff und Nichteuklidität des Raumes auf der andern Seite bilden also die Grundlagen der Untersuchungen. Leider können in diesem kurzen Referat nur die Ergebnisse in knappster Form angedeutet werden, obschon die scharfsinnigen und anregenden Gedankengänge der drei Arbeiten erheblich wesentlicher sind als die Resultate, die bei allen drei Autoren ähnlich lauten und keine Überraschungen bringen.

Gr. Hermanns Bemühen geht dahin, nachzuweisen, daß das Prinzip der Kausalität — daß nämlich nichts in der Natur geschieht, was nicht in allen physikalisch feststellbaren Teilen durch frühere Vorgänge verursacht ist — auch in der Quantenmechanik vorausgesetzt wird; nur müsse man die bisher mit dem Kausalgesetz meist eng verknüpft gedachte Vorausberechenbarkeit der Vorgänge von diesem abtrennen. Desgleichen seien die klassischen Vorstellungen vom Euklidischen Raum und von dem durch die transitive Gleichzeitigkeitsbestimmung normierten Ablauf der Ereignisse durch die Relativitätstheorie nicht angetastet worden, nur daß Raum und Zeit nicht mehr als absolute, für den Gebrauch des Physikers jederzeit fertig vorliegende Bestimmungsstücke gelten können.

E. May sucht in seiner Arbeit die Stellen aufzuzeigen, wo die eigentliche erkenntnistheoretische Problematik beginnt, zu der die Physik keine Beziehungen mehr hat; er will vor allem auch gewisse Übergriffe abwehren, wie sie sich ihm namentlich in dem „Physikalismus" des sog. Wiener Kreises darstellen. Man habe empirische Schwierigkeiten, die sich in der Physik eingestellt hätten, in unzulässiger Weise mit erkenntnistheoretischen Problemen verquickt. Der Substanz- und der Kausalsatz müßten auch von der Quantentheorie als unumstößliche Postulate vorausgesetzt werden, wie sie ja auch schon im einfachsten Experiment steckten. Die Euklidischen Axiome seien eine Denknotwendigkeit, die von der Relativitätstheorie ebensowenig angetastet werden könnten wie unser „Wissen" um Raum und Gleichzeitigkeit, doch gebühre dieser Theorie das unbestreitbare Verdienst, die Vorgänge auf die einfachste und vollständigste Weise zu beschreiben.

Trotz der gleichlautenden Ergebnisse besteht zwischen den beiden Arbeiten ein wesentlicher Unterschied: für Gr. Hermann geben Quanten- und Relativitätstheorie den Anstoß, sich erneut mit dem zuerst von Kant in aller Schärfe formulierten Erkenntnisproblem zu beschäftigen, während E. May der Physik keinen Einfluß auf eine derartige Untersuchung zubilligt, der Physik vielmehr das Recht abspricht, von ihrem Empirismus und von ihren Theorien aus sich mit erkenntnistheoretischen Fragen zu befassen.

Andersartig nach Aufbau und Behandlung ist die Arbeit von Th. Vogel, der übrigens das Raum- und Zeitproblem unerörtert läßt. Einen großen Teil der Arbeit bilden sprachphilosophische Untersuchungen, bei denen er sich auf den „Tractatus logico-philosophicus" von Wittgenstein stützt. Es folgt dann ein Abschnitt über die Methodik der theoretischen Physik („Modell und Kalkül"), die letzten beiden Abschnitte behandeln „Kausalität" und „Erkenntnis". Die Arbeit ist nicht ganz bequem zu lesen; Verf. wirft eine Fülle von Fragen auf, die er dann bisweilen nur andeutungsweise behandelt; er zitiert viel, und man ist nicht immer ganz sicher, ob er die Ansichten der angeführten Autoren teilt oder nur über sie referiert; einige Male (S. 173, Anm. 1 und S. 198 Anm. 2) zitiert er etwas sorglos, so daß leicht eine falsche Meinung von der Einstellung der betreffenden Autoren entstehen kann. Im Schlußabschnitt kommt er zu dem Ergebnis, daß, wenn Kausalität — diese „Begriffsmolluske", wie er sie nennt — den Glauben bedeutet, daß die Wirklichkeit durch Gesetze erfaßt werden kann, auch die Quantentheorie daran nicht rüttelt. Die Quantentheorie bestätige ferner die Auffassung, daß es „sinnlos sei, von jenem erhabenen und in sich geschlossenen Sein zu sprechen, um das die Metaphysiker ringen". „Es gibt keine absolute Erkenntnis."

Überblickt man die Ergebnisse der vorliegenden sowie der vielen sonstigen Untersuchungen über das Thema „Moderne Physik und Philosophie", so drängt sich einem die Frage auf, ob es in dem gegenwärtigen Zustande der Physik nicht vielleicht besser wäre, erkenntnistheoretische Konsequenzen aus einer im Flusse befindlichen Entwicklung noch nicht zu ziehen. Die Theorien sind trotz ihrer großen Erfolge doch wohl noch nicht vollkommen genug, als daß man mit ihrer Hilfe jetzt schon an die Frage einer Revision der Grundlagen des Erkennens herantreten könnte.

Berlin. E. Mosch. 799

ALFRED **TARSKI,** Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik. X + 166 S. Wien 1937, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 7,50 M.

Das Buch will denjenigen Gebildeten, die sich für die Fragen der Grundlegung und des Aufbaus der Mathematik interessieren, ohne zur Mathematik nähere Beziehungen zu haben, einen Begriff von jener „Entwicklung der Mathematik in die Tiefe" geben, die vor etwa einem Jahrhundert eingesetzt und bereits einen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht hat. Eine systematische Darstellung des ganzen in Betracht kommenden Gebietes konnte in einem der Einführung dienenden Buche nicht beabsichtigt sein; so behandelt der erste Teil eine Auswahl von Fragen aus der mathematischen Logik und Methodologie. In klaren, an einfachen Beispielen erläuterten Ausführungen behandelt Verf.

den Begriff der Variablen (und die Aufstellung mathematischer Sätze), den Aussagekalkül (und die Regeln des Beweisens), die Theorie der Identität, die Klassentheorie (mit den Elementen der Mengenlehre) und die Relationstheorie (mit der Funktionslehre). Ein weiterer Abschnitt befaßt sich mit der deduktiven Methode und dem Wesen der mathematischen Axiomatik. Während der erste Teil des Buches also eine Reihe von Einzelfragen aus dem Gesamtgebiet der mathematischen Logik herausgreift, behandelt der zweite Teil ein begrenztes Gebiet, dieses aber mit einer gewissen Vollständigkeit, und zwar wird in Anwendung der im ersten Teil erhaltenen Ergebnisse der Aufbau eines Bruchstücks der Arithmetik erörtert. Man erhält eine klare Vorstellung von dem Wesen der Axiomatik, von den Möglichkeiten verschiedener Axiomensysteme u. a. m. Auch der den Dingen ferner Stehende dürfte einen recht guten Einblick in die Gedankenarbeit erhalten, die mit der exakten Begründung selbst der einfachsten Sätze der Arithmetik verbunden ist. Daß Verf. gerade die Arithmetik zur Erläuterung der vorhergehenden allgemeinen Erörterungen gewählt hat, und daß er überhaupt meist Beispiele aus dem Gebiete der Arithmetik bringt, um die Sätze der mathematischen Logik und der Methodologie zu veranschaulichen, ist wegen der Einfachheit der Begriffe und Sätze sowie der Beweismethoden der Arithmetik durchaus gerechtfertigt. Gelegentliche geschichtliche Bemerkungen bilden eine erfreuliche Zugabe zu den abstrakten Darlegungen. Im ganzen ist der Stoff klar und leichtfaßlich behandelt worden; manche Kapitel freilich, wie etwa das über Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiomensysteme sind so knapp geraten, daß ihr Studium dem Nichtmathematiker einige Mühe verursachen dürfte. Jedem Kapitel ist eine Reihe von Aufgaben zur Übung und Festigung des Durchgenommenen beigegeben. Bei den schwierigeren Aufgaben, die zum Teil den behandelten Stoff noch ergänzen und Neues bringen, ist öfters auch der Weg zur Lösung angegeben. Vielleicht würden die Aufgaben noch mehr Nutzen stiften und noch größeren Anreiz zu Lösungsversuchen geben, wenn der Lösungsweg noch häufiger angedeutet und überall dort die Lösung beigegeben würde, wo das in knappen Worten möglich ist. — Literaturangaben im Text und am Schlusse des Buches weisen den Leser auf wichtige Werke hin, die zur Vertiefung und Erweiterung des im vorliegenden Buche erworbenen Wissens dienen.

Berlin. E. Mosch. 840

Dr. RUDOLF **ROTHE**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen, Formelsammlung unt. Mitw. v. Studienrat Oskar Degosang, Ass. a. d. Techn. Hochschule Berlin. 5. Heft, Raumkurven und Flächen, Linienintegrale und mehrfache Integrale. (Teubners Math. Leitfäden Bd. 37.) 54 S. m. 46 Abb. Dgl. Heft 6. (Teubners Math. Leitfäden Bd. 38.) 105 S. m. 13 Abb. Leipzig und Berlin 1937. Verlag B. G. Teubner. Preis je Heft kart. 2.40 M.

Die Hefte 5 und 6 vom vierten Band der Höheren Mathematik von R. Rothe enthalten den Übungsstoff zum Inhalt des dritten Bandes. Das fünfte Heft bringt 41 Aufgaben über Flächen und krummlinige Koordinaten des Raumes und 71 Aufgaben über Linienintegrale im Raum, Doppelintegrale, Oberflächenbestimmung, drei- und mehrfache Integrale usf. Im sechsten Heft findet man insgesamt 162 Aufgaben über Differentialgleichungen, darunter viele technischen und physikalischen Ursprungs. Neben den formalen Integrationsverfahren werden auch die zeichnerische Integration und die Integration durch Potenzreihenentwicklung berücksichtigt.

Mit diesen beiden Heften liegt das Rothesche Lehrbuch vollständig vor. Daß es unter den deutschen Unterrichtswerken über Höhere Mathematik mit an erster Stelle genannt werden muß, ist inzwischen in den verschiedensten Besprechungen übereinstimmend hervorgehoben worden, und wenn die Leser nicht ebenso dächten wie die zünftigen Referenten, dann würde Band I kaum schon in der vierten Auflage vorliegen und Band II in der zweiten! Die Herausgabe der Übungsaufgaben scheint mir heute im Zeichen der Zurückdrängung der Grundwissenschaften im Hochschulunterricht besonders verdienstvoll zu sein; denn der Student der Technischen Hochschule ist jetzt mehr als früher darauf angewiesen, außerhalb der Vorlesungs- und Übungsstunden und auf eigene Faust Mathematik zu lernen, und dazu können ihm die Rotheschen Übungshefte mit ihren vielseitigen und anregenden Aufgaben bestens empfohlen sein!

Übrigens stimmt es doch nicht ganz, daß die Höhere Mathematik von Rothe nun vollständig vorliegt: Die Formelsammlung ist noch nicht erschienen, und mancher Student wird sie für einen sehr wesentlichen Teil des Ganzen halten!

Freiberg (Sa.). Grüß. 849

GUSTAV **DOETSCH**, ord. Prof. d. Math. a. d. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg/Br., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XLVII). XVI + 436 S. m. 18 Fig. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis geb. 36.30 M.

Es ist auch vom Standpunkt des angewandten Mathematikers aus sehr zu begrüßen, daß der Verf., der ja der Laplacetransformation den größten Teil seiner Arbeiten gewidmet hat, diesen Gegenstand einmal in einem größeren Buch zusammenfaßt und damit leichter zugänglich macht. Es handelt sich um die beiden Transformationen:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot F(t)\, dt$$

und

$$f(s) = L_{II}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt\,,$$

vor allem um die erste, deren Anwendungsbereich größer ist, während die zweite für rein imaginäres s die Fouriertransformation mitumfaßt. Der Gegenstand ist deshalb für die Anwendungen wichtig, weil diese Transformationen gestatten, schwierige Probleme der Analysis in einfachere zu verwandeln, etwa partielle Differentialgleichungen in gewöhnliche. Von der Notwendigkeit solcher Transformationen getrieben, hat sich ja die Praxis in der immer beliebter werdenden Heaviside-Methode einen eigenen Weg geschaffen, eine Methode, die als illegitime Schwester der hier vorgetragenen angesprochen werden darf, ja, soweit sie richtig ist, mit ihr identisch ist. Wer also den Heavisideschen Operatorenkalkül braucht, sollte sich die Rückenstärkung in diesem Buch holen.

Er braucht nicht zu fürchten, ein allzu abstraktes, nur für den Fachmathematiker geschriebenes Werk vorzufinden. Viel mehr als die Mathematik der ersten Semester wird nicht vorausgesetzt, es ist besonders dankenswert, daß der Verf. im ersten Kapitel die gebrauchten Grundbegriffe der Funktionalanalysis auseinandersetzt. Auch kommt er mit dem Riemannschen Integralbegriff aus. Ferner hat er eine gewisse Breite der Darstellung nicht gescheut, vor allem versucht er, die angestellten Überlegungen aus bekannten Sätzen über Potenzreihen hervorgehen zu lassen. Auch die historische Entwicklung fehlt nicht, in großen Zügen ist sie in den

Text eingearbeitet, Einzelheiten stehen in den sehr zahlreichen Anmerkungen. Literaturangaben sind reichlich vorhanden.

Die Dicke des Buches braucht auch nicht zu schrecken. Wer von den Anwendungen kommt, muß nicht gleich alles lesen. Nötig ist das Studium des ersten Teils, in dem auf 173 Seiten die allgemeine Theorie dargestellt ist. Dabei kann noch manches aus dem vierten und fünften Kapitel bei einem ersten Studium beiseite gelassen werden. Man findet hier die für den Mathematiker sehr wichtigen Untersuchungen über die Konvergenz, namentlich an den Grenzen, und viele interessante Beziehungen zur Funktionentheorie. Am wichtigsten sind die Kapitel 3, 6 und 8, in denen die grundlegenden Begriffe, die komplexe Umkehrformel und die Einwirkung elementarer Operationen auf die Laplacetransformation studiert werden. Wer das Buch der Anwendungen wegen liest, kann nach Aufnahme dieser drei Kapitel des ersten Teils nun gleich zu den Anwendungen des fünften Teils übergehen. Hier findet er auf fast hundert Seiten die Anwendungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, insbesonders die Wärmeleitungsgleichung und die Telegrafengleichung, die Beziehungen zum Heaviside-Kalkül, die ja besonders interessieren werden, und das Huygenssche und Eulersche Prinzip.

Der kurze zweite Teil enthält ein Kapitel über Reihen, wobei die ϑ-Funktionen und ihre Beziehungen zu den Besselschen Funktionen, die Reihen nach Laguerreschen und Hermiteschen Polynomen behandelt werden, die auch sonst noch oft als Beispiele vorkommen. Teil III: Asymptotisches Verhalten von Funktionen wird in erster Linie den Mathematiker interessieren. Hier gibt es Abelsche Asymptotik, Taubersche Asymptotik und indirekte Abelsche Asymptotik. Dabei zahlreiche Anwendungen, so auf den Primzahlsatz. Teil IV enthält Anwendungen auf bestimmte Integralgleichungen, so die Abelsche und bringt auch die Differentiation und Integration nichtganzer Ordnung.

Man erkennt den in jeder Beziehung außerordentlich reichen Inhalt des Buches. Übrigens hat der Verf. in Aussicht gestellt, auf die Anwendungen noch einmal besonders einzugehen und er bittet um Material aus den Kreisen der Ingenieure, vor allem Nennung ungelöster Probleme. Der Wunsch sei hier gerne weitergegeben. Bemerken wir noch, daß eine Tabelle mit drei Seiten elementarer ausführbarer Laplacetransformationen manchem sehr erwünscht sein wird.

Alles in allem ein Buch, das ich wegen des wertvollen und reichen Inhaltes und der strengen, doch zugänglichen Form besonders gerne anzeige.

Berlin. Hamel. 841

C. CARATHÉODORY, Geometrische Optik (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeb. v. d. Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik". 4. Bd., Heft 5). 104 S. m. 11 Fig. Berlin 1937, Verlag von Julius Springer. Preis brosch. 9,90 M.

Der Verfasser behandelt nur die mathematischen Grundlagen der geometrischen Optik ohne auf die Theorie der optischen Instrumente einzugehen. Nach einer interessanten historischen Einleitung werden im ersten Kapitel die grundlegenden Prinzipien von Huygens und Fermat und ihr Zusammenhang erörtert. Das zweite Kapitel bringt die Aufstellung der Differentialgleichung für die Lichtstrahlen, die partielle Differentialgleichung für die Hamiltonsche Funktion, sowie die Einführung der Lagrangeschen Klammerausdrücke. Hierbei lehnt sich die Darstellung an eine wohl wenig bekannte Abhandlung von Cauchy an, die in den bisher erschienenen „Oeuvres Complètes" noch nicht abgedruckt ist. Die Lagrangeschen Klammerausdrücke werden dann im Zusammenhang mit dem Malusschen Theorem und mit den Integralinvarianten gebracht. Das dritte Kapitel behandelt die Abbildung der Strahlen des Bildraums auf die Strahlen des Objektraumes. Die Definition stützt sich auf die Invarianz der Lagrangeschen Klammerausdrücke im Bildraum und im Objektraum. Aus dieser Definition ergibt sich leicht die Kennzeichnung dieser Abbildung durch kanonische Transformationen. Diese werden dann auch durch die Poissonschen Klammerausdrücke gekennzeichnet. Im Anschluß hieran wird die Verwendung von Eikonalen besprochen, und zwar werden nicht nur die üblichen Punkteikonale, Winkeleikonale und gemischten Eikonale, sondern auch sogenannte schiefe Eikonale (die drei Veränderliche der einen Gattung und eine Veränderliche der anderen Gattung enthalten) eingeführt. Dabei wird sehr gründlich die Frage erörtert, in welchen Ausnahmefällen die Darstellung der Strahlenabbildung mit einem der besprochenen Eikonale versagt. Die Grundlagen für das vierte Kapitel bilden die erweiterten Kanonischen Transformationen, bei denen die Linienelemente des Objektraumes in Linienelemente des Bildraums transformiert werden. Die wichtigste Anwendung ist hier wohl der bereits früher von Carathéodory behandelte Satz, daß ein absolutes optisches Instrument weder vergrößern noch verkleinern kann. Das letzte Kapitel behandelt die linearen Strahlenabbildungen, d. h. also jene Strahlenabbildungen, die dem akzessorischen Variationsproblem entsprechen. Dabei wird die von Gullstrand durchgeführte Klassifizierung der Strahlenabbildungen erörtert und namentlich die Sonderstellung der Gaußschen (rotationssymmetrischen) Strahlenabbildung besprochen.

Sicher sind viele Einzelergebnisse neu und vielfach werden auch Vorurteile, die sich durch die Betrachtung der in der Praxis vorkommenden Fälle eingebürgert haben, zerstört.

Prag. Funk. 842

Bessel Functions, Part I, Functions of Orders Zero and Unity (British Association for Advancement of Science, Mathematical Tables, Vol. VI). VIII + 288 S. Cambridge 1937, University Press. Preis geb. 40 sh.

Die British Association vermehrt die Reihe ihrer Tafelwerke durch die vorliegende Veröffentlichung um einen außerordentlich wertvollen Band. Sie beginnt damit die schon seit langem geplante Herausgabe von Tafeln der Besselschen Funktionen, für die drei Bände vorgesehen sind, von denen der vorliegende erste die Funktionen nullter und erster Ordnung enthält. Er wird von L. J. Comrie durch eine kurze Beschreibung der Tafeln und einen Bericht über die Berechnung der Funktionswerte und über die sorgfältigen Kontrollen der selbstberechneten wie der aus anderen Tafeln übernommenen Werte eingeleitet. Weiter gibt J. Henderson, der Obmann des für die Herausgabe dieser Tafeln gebildeten Unterausschusses, eine Übersicht über die verschiedenen Bezeichnungen. Das umfangreiche Zahlenmaterial selbst wird dann in 10 Tafeln zusammengestellt. In Tafel I sind $J_0(x)$ und $J_1(x)$ auf zehn Dezimalen mit einem Argumentschritt 0,001 im Intervall 0 bis 16 und einem solchen von 0,01 im Intervall 16 bis 25 aufgezeichnet. Die nächste Tafel gibt die 150 ersten Nullstellen dieser Funktionen mit den zugehörigen Werten der anderen Funktion ebenfalls auf zehn Stellen hinter dem Komma. Tafel III bringt die Neumannschen Funktionen $Y_0(x)$ und $Y_1(x)$ (bei Jahnke-Emde mit $N_0(x)$ und $N_1(x)$ bezeichnet) von 0 bis 25 mit einem Argumentschritt 0,01 auf 8 Dezimalen. Für $x < 0{,}50$ werden der genaueren Interpolation wegen Hilfsfunktionen tabelliert. Es folgen die ersten 50

Nullstellen der Neumannschen Funktionen ebenfalls mit 8 Dezimalen. Da für $x > 25$ bei der Interpolation der mit dem Argumentschritt 0,1 aufgezeichneten Besselschen Funktionen Differenzen vierter Ordnung benutzt werden müßten, gibt Tafel V Hilfsfunktionen, aus denen sich in einfacher Weise die Besselschen Funktionen berechnen lassen, und zwar in den Intervallen 25 bis 50, 50 bis 150, 150 bis 1000 bzw. 1000 bis 6000 mit den Argumentschritten 0,1; 1; 10 bzw. 100. Die beiden nächsten Tafeln geben die Lösung der Besselschen Gleichung für rein imaginäres Argument, und zwar Tafel VI $I_0(x) = J_0(ix)$ und $I_1(x) = -iJ_1(ix)$ von 0 bis 4 auf 8 und von 4 bis 5 auf 7 Dezimalen mit 0,001 als Argumentschritt, und weiter

$$K_0(x) = \frac{\pi}{2}\, i H_0^{(1)}(ix) \quad \text{und} \quad K_1(x) = -\frac{\pi}{2}\, H_1^{(1)}(ix)$$

mit einem Argumentschritt 0,01 in den Intervallen 0,30 bis 3 auf 8, 3 bis 4 auf 9 und 4 bis 5 auf 10 Dezimalen. Auch hier sind der genaueren Interpolation wegen für Argumentwerte kleiner als 0,3 Hilfsfunktionen tabelliert. Die $I(x)$ und $K(x)$ nehmen mit wachsendem Argument exponentiell zu bzw. ab. Deswegen geben die nächsten Tafeln $e^{-x}\, I(x)$ bzw. $e^{x}\, K(x)$ von 5 bis 10 und von da bis 20 mit dem Argumentschritt 0,01 bzw. 0,1 auf 8 Stellen hinter dem Komma. Weiter ist dann zum Umrechnen e^{x} und e^{-x} aufgezeichnet. In sämtlichen Tafeln sind die zweiten Differenzen der Funktionswerte angegeben. Die Interpolation kann mittels der Besselschen oder mittels der Everettschen Formel erfolgen, je nachdem, ob man die dritten oder die vierten Differenzen vernachlässigt. Die in diesen Formeln auftretenden Koeffizienten sind in der letzten Tafel aufgezeichnet.

Der Druck des umfangreichen Werkes ist außerordentlich klar, und die Anordnung der Tafeln sehr übersichtlich. Möge der Herausgeber, der die Hoffnung ausspricht, daß die Tafeln infolge der eingehenden Kontrollen vollkommen fehlerfrei sind, recht haben.

Dresden. Willers. 820

C. E. **WEATHERBURN**, M. A. D. Sc. Prof. of Mathematics in the University of Western Australia, An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus. X + 191 S. Cambridge 1938, University Press. Preis sh. 12/6.

Ein elementares Lehrbuch für Tensorrechnung und Riemanngeometrie, das sich durchaus an das Übliche hält und nicht sehr weit geht. Als erste Einführung in den Gegenstand brauchbar, mit zahlreichen Übungsaufgaben und Literaturnachweisen.

Blaschke. 874

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI**, o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden. Große Mathematiker, eine Wanderung durch die Geschichte der Mathematik vom Altertum bis zur Neuzeit. 300 S. m. 35 Textfig. u. 16 Kunstdrucktafeln. München u. Berlin 1938, J. F. Lehmanns Verlag. Preis geb. 11,60 M.

Die vorliegende Geschichte der Mathematik ist weniger eine Geschichte ihrer Probleme als eine Schilderung der Persönlichkeit, der Schicksale und der Leistungen großer Mathematiker. Nach einer kurzen Würdigung der bedeutendsten Mathematiker des klassischen Altertums, des Mittelalters und der Renaissance behandelt der Verfasser eingehend die beiden Erfinder der Infinitesimalrechnung und ihre Vorläufer. Ausführlich bespricht er auf Grund der Untersuchungen von Mahnke den unerfreulichen Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton. Das Schlußkapitel, das an Umfang mehr als die Hälfte des ganzen Buches einnimmt, schildert dann Persönlichkeit und Leistung der Gelehrten, denen man den weiteren Ausbau der Analysis verdankt, bis zu Gauß und Cauchy. Dabei weist der Verfasser an vielen Stellen auf neuere Fortschritte in der Behandlung der von diesen Mathematikern erörterten Probleme hin.

Das Buch, das mit den Bildern von 16 Mathematikern der neueren Zeit geschmückt ist, ist außerordentlich interessant geschrieben. „Man kann durchaus auch als Laie „darin lesen" und die wenigen ganz ausgesprochen mathematischen Abschnitte überschlagen. Es bleibt immer noch des Interessanten genug." Möge das Buch dazu beitragen in den Kreisen der Gebildeten nicht nur Interesse für die Persönlichkeiten großer Mathematiker zu erwecken, sondern darüber hinaus auch für die Probleme der Mathematik.

Dresden. Willers. 805

Dr. K. **SCHWIDEFSKY**, wissenschaftl. Mitarbeiter d. opt. Werke Zeiss, Jena, Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. Mit 57 Abb., einer schwarzen und einer farbigen Tafel im Text, einer schwarzen Tafel, einer farbigen Brille und zwei Stereobildern im Anhang. IV + 112 S. Leipzig u. Berlin 1936, B. G. Teubner. Preis kart. 5,60 M, geb. 6,20 M.

Die allgemeine Aufgabe der Bildmessung, aus zwei im Raum beliebig orientierten Zentralprojektionen eines Objekts dessen orthogonale Projektionen (Grund- und Aufriß) abzuleiten, hat durch den Bau interessanter Maschinen eine optisch-mechanische Lösung gefunden. Damit aber wurde die Bildmessung, und insbesondere die Luftbildmessung, zu einer topographischen Arbeitsmethode von außerordentlicher praktischer Bedeutung.

Das vorliegende Buch gibt eine durch verständliche Darstellung und klare Abbildungen ausgezeichnete Einführung in diese moderne topographische Bildmessung; es behandelt knapp aber wissenschaftlich einwandfrei ihre mathematischen, optischen, mechanischen und physiologischen Grundlagen und bringt neben einem Sach- und Namenverzeichnis eine gute Auswahl des Schrifttums, das für ein eingehendes Studium gebraucht wird.

Das vorzüglich ausgestattete Buch kann auch als Unterlage für den Unterricht warm empfohlen werden.

Dresden. Hugershoff. 869

Prof. Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER**, ord. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden, Vermessungskunde I Stückmessung und Nivellieren. (Samml. Göschen, Bd. 468). 162 S. Berlin und Leipzig 1938, Verlag Walter de Gruyter. Preis geb. 1,62 M.

Band 468 der Sammlung Göschen, der aus dem Gebiet der Vermessungskunde die Kapitel „Stückmessung" und „Nivellieren" behandelt, ist vom Verlag de Gruyter in sechster Auflage herausgegeben worden. Die Ausführungen, die sich in einem ersten Abschnitt mit den zur Aufnahme kleiner Lagepläne erforderlichen Instrumenten und deren Anwendung, mit der Herstellung von Lageplänen und mit der Flächenbestimmung, in einem zweiten Abschnitt mit den verschiedenen Arten von Nivellierinstrumenten, den Nivellements und der Auswertung der Messungsergebnisse befassen, sind allgemein und sehr gut verständlich gehalten und behandeln trotz des beschränkten zur Verfügung stehenden Raumes den Stoff ziemlich eingehend. Durch 145 klare und übersichtliche Abbildungen und nicht zuletzt durch den sauber ausgeführten Druck wird die Bearbeitung wirksam unterstützt. Die Herausgabe der sechsten Auflage trägt die Anerkennung in sich, die das Bändchen seit seinem ersten Erscheinen gefunden hat.

Freiberg/Sa. H. Müller. 843

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. phil. HARALD **GEPPERT,** o. Prof. d. Math. a. d. Univ. Gießen, und Dr. phil. habil. SIEGFRIED **KOLLER,** Vorstand d. Statistischen Abt. d. Kerckhoff-Instituts Bad Nauheim, Erbmathematik, Theorie der Vererbung in Bevölkerung und Sippe. VIII + 236 S. m. Abb. Leipzig 1938, Verlag Quelle & Meyer. Preis geb. 18 M.

Prof. Dr.-Ing. KURT **RAUH,** Dr.-Ing. HERMANN **MARKS,** Dipl.-Ing. WALTER **BÜNDGENS,** Dipl.-Ing. KARL **OTTO,** Kardanbewegung und Koppelbewegung, ein einfaches Verfahren zur Klärung der Bewegungsverhältnisse und zum schnellen und sicheren Entwurf von Koppelkurven-Getrieben. (Praktische Getriebetechnik, Heft 2, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Kurt Rauh, Techn. Hochschule Aachen.) 63 S. m. 93 Abb., 3 Konstruktionstafeln und 1 Genauigkeitstafel. Berlin 1938, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis br. 12 M.

JOSEF **HAILER,** Technischer Reichsbahnoberinspektor, Gleiskrümmung und Fliehkraft auf Eisenbahnbrücken, eine Anleitung zur Berechnung dieser Einflüsse auf die stählernen Eisenbahnbrücken unter Beachtung der Vorschriften der Deutschen Reichsbahn. VI + 49 S. m. 46 Abb. Berlin 1938, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis br. 3,80 M.

Dr.-Ing. ERWIN **MAYER,** VDI, Einfluß der Querschnittsverformung auf die Entwicklung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung bei turbulenten Strömungen in Rohren. (VDI-Forschungsheft 389, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens“, Ausgabe B, Bd. 9, März/April 1938.) 20 S. m. 64 Abb. Berlin 1938, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis br. 5 M.

TH. **SKOLEM,** Diophantische Gleichungen. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben von der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“, 5. Bd., Heft 4.) IV + 130 S. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 15 M.

The Collected Papers of George Ashley Campbell. XII + 548 S. New York 1937, Verlag American Telephone and Telegraph Company.

W. **HÄBICH,** emer. o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Stuttgart, Organisationselemente einer Funktionstechnik. VI + 365 S. m. 3 Abb. u. 22 Taf. München u. Berlin 1938, Verlag R. Oldenbourg. Preis brosch. 12 M.

Dr.Ing. RUDOLF **KIRCHHOFF,** Die Statik der Bauwerke in 3 Bänden. 3. Band: Methoden besonderer Art zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme unter besonderer Berücksichtigung der neuzeitlichen hochgradig statisch unbestimmten Bauwerke. — Die Elastizitätstheorie der Gewölbe. Mit 75 z. T. farb. Textabb. 2. Aufl. Berlin 1938, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Preis geh. 18 M, geb. 20 M.

MAURICE **FRÉCHET,** Prof. a. d. faculté des Sciences Paris, Méthode des fonctions arbitraires, Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, second livre. (Traité du calcul des probabilités et de ses applications herausgegeb. v. Emile Borel.) X + 318 S. Paris 1938, Gauthier-Villars. Preis brosch. 130 fr.

Dr. A. **TIMPE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Versicherungsrechenblatt (herausgegeb. v. Seminar für Wirtschaftsmathematik d. Techn. Hochsch. Berlin) und Erläuterung. Leipzig 1938, Verlag Hans Buske. Preis 1,50 M.

B. **RIEMANN,** Partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendungen auf physikalische Fragen. Herausgegeb. von Karl Hattendorff, m. einem Vorwort von Prof. Dr.-Ing. e. h. Fritz Emde, Stuttgart. XII + 325 S. Braunschweig 1938, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 9,60 M.

CHARLES N. **MOORE,** Prof. of Mathematics a. d. Univers. Cincinnati, Summable Series and Convergence Factors. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXII.) VI + 105 S. New York 1938, American Mathematical Society. Preis 2 Dollar.

NACHRICHTEN

Prof. Dr. W. Hort †.

Am 2. Juni 1938 schied Dr. W. Hort, o. Prof. an der Technischen Hochschule Berlin, im Alter von 60 Jahren aus dem Leben. Hort, der Leiter der mechanischen Abteilung des Institutes für Schwingungsforschung und Herausgeber der Zeitschrift für Technische Physik war, ist unter anderem durch seine beiden vielgebrauchten Lehrbücher bekannt geworden, seine „Technische Schwingungslehre“, die in erster Auflage 1910, in zweiter 1922 herauskam, und „Die Differentialgleichungen des Ingenieurs“ (1. Aufl. 1914, 2. Aufl. 1925). Ein besonderes Verdienst erwarb er sich durch die Mitherausgabe des siebenbändigen Handbuches der Physikalischen und Technischen Mechanik, das in den Jahren 1927 bis 1931 erschien.

Die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik

wird ihre diesjährige Tagung von Donnerstag, den 20. Oktober bis Sonnabend, den 22. Oktober in Göttingen abhalten. Die Geschäftssitzung findet am Freitag, den 21. Oktober, um 9 Uhr statt.

Der 14. Deutsche Physiker- und Mathematikertag findet in der Zeit von Sonntag, den 11., bis Freitag, den 16. September in Baden-Baden statt. Die GAMM wird sich an der Tagung beteiligen, aber keine eigene Vortragsfolge aufstellen. Fragen der angewandten Mathematik und Mechanik werden am Freitag, dem 16. September, vormittags, behandelt werden.

Vorträge der Ortsgruppe Prag.

4. 11. 37. E. Melan, Wien:
Plastizität des Kontinuums.

25. 11. 37. P. Funk, Prag:
Über Stabilitätsfragen bei den durch Krümmung steif gemachten Meßbändern.

27. 1. 38. W. Kuntze, Berlin:
Einige Gedanken zur Werkstoffmechanik.

17. 3. 38. J. Fritsche, Prag:
Zur Mechanik des Fließvorganges.

5. 5. 38. J. Weinhold, Brünn:
Kippen mit elastischen Widerständen. (Kipplasten von Holm-Rippenrosten.)

Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung.

Die Jahresversammlung der Gesellschaft wird in den Tagen vom 12. bis 15. Oktober in Berlin stattfinden. Nähere Auskunft ist vom Generalsekretariat der LG, Berlin NW 40, Fürst-Bismarck-Str. 2, erhältlich.

Persönliches.

Als Nachfolger des nach Berlin berufenen Professors Tölke wurde der Dozent Dr. Rudolf Sonntag in Gera zum ord. Professor für technische Mechanik an der Techn. Hochschule Karlsruhe ernannt.

Hr. Dr. E. J. Nyström wurde zum Professor für darstellende und projektive Geometrie an der Techn. Hochschule Helsingfors (Finnland) ernannt. 855

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Über die Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße. Zu der Arbeit von Herrn B. Dolaptschiew (diese Z. Bd. 17/1937. S. 313 ff.) möchte ich folgendes bemerken:

1. In meiner Arbeit: „Zur Theorie der Kármánschen Wirbelstraße" (Ing.-Arch., Bd. VII, S. 215 ff.) habe ich ausdrücklich betont, daß die Instabilität der Kármán-Straße nur bei Störungen zweiter Art eintritt, während die Straße bei Störungen erster Art stabil bleibt. Mit dem Satz (Anm. 1, S. 323): „Wäre $C_2 = 0$ (Störung erster Art), so hätte Schm. bei seinen Störungen höherer Ordnung nicht das mitgeteilte Ergebnis — (gemeint ist Instabilität) — bekommen" werden also offene Türen eingerannt.

2. Auch Herr Dolaptschiew erhält natürlich das Ergebnis, daß bei einer Störung zweiter Art die Kármán-Straße auseinanderläuft. Es scheint mir nun bestenfalls ein Streit um Worte zu sein, ob man auf Grund der — auch in meiner Arbeit formulierten — Tatsache, daß eine Störung zweiter Art der Kármán-Straße gleichzeitig eine Störung erster Art einer Straße der Breite $2h \pm \varepsilon$ ist, diese Störungen als „unzulässig" ausschließt und damit dann natürlich Stabilität der Kármán-Straße erhält, oder ob man sagt: gibt es eine Störung, bei welcher die Straße auseinanderläuft, so ist die Straße eben nicht stabil.

3. Die Instabilität gegenüber Störungen zweiter Art erscheint zwar trivial, ist es aber doch nur dann, wenn man der Theorie der kleinen Schwingungen in ihren Aussagen über Stabilität vertraut. In diesem Vertrauen wird man ja aber gerade bei der Kármán-Straße getäuscht, da die Störungsgleichungen erster Ordnung auch bei Störungen zweiter Art Stabilität ergeben. Meine Arbeit verfolgte gerade das Ziel, dies Versagen der Theorie erster Ordnung aufzuklären — nach meiner Meinung wurde in der Einleitung auf diesen Punkt mit hinreichender Deutlichkeit hingewiesen — und weiterhin zu untersuchen, welche tiefere Bedeutung die Kármánsche Bedingung für den Mechanismus der Störungsbewegung hat.

Darmstadt. C. Schmieden. 830

Erwiderung. Zu den 3 Punkten, die Herr Prof. Schmieden anführt, möchte ich folgendes bemerken:

1. Das Ziel, das ich mit dem Satz (Anm. I, S. 323): „Wäre $C_2 = 0$, so hätte Schmieden bei seinen Störungen höherer Ordnung nicht das mitgeteilte Ergebnis bekommen" verfolgte, war nicht, das von Herrn Schmieden Behauptete zu wiederholen, sondern zu unterstreichen, daß er die Annahme $C_1 = 0$ macht (während im allgemeinen $C_1 \neq 0$ — siehe II. Anhang) und im Gegenteil annimmt $C_2 \neq 0$ (während sowohl nach Definition [I], als auch nach dem Beweis [II, Anhang] $C_2 = 0$ sein muß).

2. Dieser Punkt ist der wichtigste. Herr Prof. Schmieden behauptet darin, daß ich „natürlich das Ergebnis erhalte, daß die Kármán-Straße bei Störungen zweiter Art auseinanderlaufe". Gerade im Gegenteil: sie ist immer noch stabil, dabei nicht nur bei Störungen zweiter, sondern auch höherer Ordnung, sobald die Instabilität nur aus $C_2 \neq 0$ (Störungen zweiter Art) resultiert. Denn, wie gesagt, es ist, dem Wesen nach, $C_2 = 0$. Das ist keine „unzulässige" Forderung, sondern eine zu definierende und auch zu beweisende Eigenschaft der „alternativen" Störung, um Mehrdeutigkeit zu vermeiden. Der Beweis in dem Anhang meiner II. Mitteilung: „Störungsbewegungen (Bahnen) der einzelnen Wirbel der Kármánschen Wirbelstraße"[1]) bestätigt meine Auffassung.

3. In diesem Punkt stimmen meine Ergebnisse mit den von Herrn Prof. Schmieden gewonnenen überein. In [II] habe ich ebenso gezeigt, daß wir schon dann sicher über die Resultate sind, welche uns die Theorie der kleinen Schwingungen gibt, wenn noch Störungen höherer Ordnung herangezogen werden. Erst dann (bei den von mir angenommenen Störungen zweiter Ordnung) tritt aber der Fall auf, daß für Stabilität $\mu - C_2 \nu \sqrt{\lambda} = 0$ sein muß. Hier steckt die Forderung für die Untersuchung der Natur dieser Störung zweiter Art: $C_2 \neq 0$! Meiner Meinung nach ist von vornherein klarzumachen, daß $C_2 = 0$ sein muß.

Sofia. Bl. Dolaptschiew. 830a

[1]) Das Manuskript dieses Aufsatzes ging gleichzeitig mit der Erwiderung ein. Er wird im nächsten Heft der Zeitschrift veröffentlicht werden.

V. Vâlcovici: Über die Widerstandswerte der Relativbewegung eines starren Körpers in einer zähen Flüssigkeit.

Herr Vâlcovici hat in Heft 3 der Zeitschrift von 1937 einen interessanten Satz über die Beziehung der Widerstandswerte eines starren Körpers in einer zähen Flüssigkeit bei gleicher Relativbewegung, aber einmal ruhendem Körper, dann im Unendlichen ruhender Flüssigkeit ausgesprochen. In der auf Seite 177 in der Mitte ausgesprochenen Form und Allgemeinheit ist der Satz wohl kaum zu halten, gleichgültig wie man ihn auffaßt. Nimmt man an, daß zwei tatsächliche Bewegungen verglichen werden sollen: einmal der bewegte Körper in einer Flüssigkeit, die im Unendlichen ruhen soll und dann der ruhende Körper in einer Flüssigkeit, die im Unendlichen die entgegengesetzte Bewegung haben soll wie vorher der Körper, so ist die Begründung auf Seite 178, Zeile 17 und 18 unzureichend. Denn um denselben Bewegungszustand zu bekommen, genügen ja nicht dieselben Grenzbedingungen, man muß auch dieselben Differentialgleichungen haben, was wohl bei der Potentialbewegung einer idealen Flüssigkeit so sein würde, aber nicht bei der Bewegung irgendeiner kompressiblen und dazu noch zähen Flüssigkeit. Jedenfalls würde dann die Gleichung (5) keine Folgerung, sondern eine notwendige Voraussetzung des Satzes werden. Wie

aber ein Briefwechsel mit dem Verf. zeigt, faßt dieser seinen Satz anders auf: das zweitemal wird der Körper festgehalten und der Flüssigkeit zwangsweise dieselbe Relativbewegung zum Körper auferlegt, wie das erstemal von selbst eintrat. Dann sind natürlich dieselben Gleichungen per definitionem erfüllt, aber es fragt sich jetzt, ob der Verf. dafür auch die Gleichungen (4) hinschreiben darf, d. h. ob diese zwangsweise aufgeprägte Bewegung auch die einer zähen Flüssigkeit ist. Wiederum ist dann (5) eine Voraussetzung des Satzes. Es wäre jedenfalls erwünscht, wenn der Verf. seinem Satz eine unmißverständliche Form gäbe und wenigstens hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit des Satzes nennte. Daß solche Bedingungen bestehen müssen, ergibt sich aus den Ausführungen des Verf. selber. Hamel. 856

Erwiderung. Der von mir bewiesene Satz ist doch gültig in der auf Seite 177 in der Mitte ausgesprochenen Form, unter den Bedingungen, die im Laufe des Beweises klar ausgedrückt worden sind und welche die Ausdehnung der praktischen Anwendungen kaum beeinträchtigen. Jedenfalls ist der Satz gültig für den Fall der gradlinigen, eine konstante Rotation besitzende Schraubenbewegung in einer zähen, homogenen, imkompressiblen Flüssigkeit, die sich unter der Wirkung einer konservativen Massenkraft $\overline{g}$ befindet (S. 180, Zeile 20—25).

Herr Hamel hat anfangs geglaubt, daß der Beweis auf die Vermutung fuße, daß die Identität der Grenzbedingungen eine hinreichende Bedingung für die Identität zweier Lösungen zweier verschiedenen Differentialgleichungen sei. Kann bloß die vielleicht nicht ganz glückliche Redaktion der von Herrn Hamel angeführten Zeilen 17 und 18 eine solche Meinung rechtfertigen? Ich wollte es kaum glauben.

Die Idee, auf welcher die Gleichung (4) fußt, ist folgende: Die Relativbewegung der Flüssigkeit in bezug auf einen mit dem Körper fest verbundenen Beobachter besitzt dieselbe Geschwindigkeitsverteilung, unabhängig davon, ob der Körper ruht und die Flüssigkeit eine bestimmte starre Bewegung im Unendlichen hat oder aber die Flüssigkeit im Unendlichen ruht und der Körper die starre Bewegung im entgegengesetzten Sinne besitzt. Deshalb ist die Beziehung (5) eine Folgerung der Identität der beiden Geschwindigkeitsverteilungen, nicht etwa eine Voraussetzung. Herr Hamel fragt sich aber, ob ich die Gleichung (4) hinschreiben darf, d. h. „ob diese zwangsweise aufgeprägte Bewegung auch die einer zähen Flüssigkeit ist". Nun würde ich aber fragen, welche von den beiden Bewegungen als eine „zwangsweise aufgeprägte" zu betrachten wäre? Meiner Meinung nach haben beide dasselbe Recht zur Existenz, so daß, falls die Gleichung (3) gültig ist, auch (4) gültig sein muß.

Bukarest. V. Vâlcovici. 856a

Ein graphoanalytisches Verfahren zur Bestimmung des Beschleunigungspoles und der Beschleunigungspolkurven der ebenen Bewegung von N. Rosenauer, Riga. ZAMM 1938, Heft 2, S. 136.

Die einfache Konstruktion des Beschleunigungspoles nach Abb. 1 ist zuerst veröffentlicht in Hütte I., 25. Aufl. 1925, S. 301. Der Beweis dafür erschien in ZAMM 1930, S. 199[1]). Die Konstruktion wurde verwendet in „Nockenbeschleunigungen und Massenwirkungen bei Treibstangen", Diss. München 1929 von Hermann Conrady (nicht gedruckt), wo auf S. 12 und 13 die mit ihrer Hilfe in der festen Ebene gezeichnete Beschleunigungspolbahn diskutiert wird. K. Federhofer in „Graphische Kinematik und Kinetostatik" 1932, S. 4, erörtert ebenfalls die Konstruktion und gibt außerdem die Koordinaten des Beschleunigungspoles bezogen auf die gleichen Achsen wie Rosenauer für die bewegte Ebene an. Die Gl. (207a), (207b) finden sich bei R. Beyer, Technische Kinematik 1931 auf S. 236, nicht 216.

München. G. Marx. 868

Erwiderung. Die erwähnte Konstruktion des Beschleunigungspoles habe ich als bekannt vorausgesetzt. Die Erstveröffentlichung derselben ist aber auf Prof. N. Joukovsky in das Jahr 1915 (Vorlesungen über theoretische Mechanik, Moskau) zurückzuführen, wie das in dem ausführlichen Text meines Aufsatzes vermerkt worden ist (siehe: Acta Universitatis Latviensis, Mech. fak. serija I Nr. 8, 1935).

Die Formeln von K. Federhofer[2]), wie auch die von O. Heck[3]), geben ebenfalls die Koordinaten des Beschleunigungspoles in der bewegten Ebene, nur finde ich die Art meiner Formeln für den praktischen Gebrauch bequemer, wie das aus dem angeführten Beispiel zu ersehen ist.

Riga. N. Rosenauer. 868a

Schlußbemerkung zur Erwiderung N. Rosenauers. Daß N. Joukovsky bereits 1915 die gleiche Konstruktion veröffentlicht hat, war mir bisher nicht bekannt. Ich muß auch annehmen, daß sie überhaupt in Deutschland nicht bekannt geworden ist, was z. B. aus den Äußerungen von Alt[4]) und Federhofer[5]) hervorgeht, mit denen sie auf meine Konstruktion Bezug nehmen. Da nach brieflicher Mitteilung Herrn Rosenauers die Ableitung Joukovskys viel komplizierter war, bleiben zugunsten meiner Darstellung noch die einfachen Überlegungen und der kurze Weg übrig, die zur zweiten Auffindung der Konstruktion führten. G. Marx. 868

Der vollkommen biegsame Faden unter hydrostatischem Druck.

Bemerkung zur Mitteilung von R. Schjödt [Z.A.M.M. 18 (1938) S. 138—140].

Die von Herrn Schjödt in der genannten Arbeit mitgeteilten Ergebnisse sind nicht neu; man findet sie mit einfacherer Herleitung und ergänzt durch Zahlenmaterial, das die praktische Verwertung der Ergebnisse ermöglicht, bereits in meiner vor 25 Jahren erschienenen Arbeit „Über die Formbestimmung des Wölbmantelbeckens", Zeitschrift „Der Eisenbau", IV. Jahrgang, 1913, S. 355 bis 361. Ich bin dabei ausgegangen von der von Herrn Schjödt nicht bemerkten einfachen Gleichung der Kurve $x \cdot \varrho =$ konst. (x Ordinate in lotrechter Richtung, ϱ Krümmungshalbmesser), welche ausdrückt, daß für die gesuchte Kurve als Seillinie der mit x proportionalen Wasserdrücke die Seilspannungen konstant sein müssen, da die Wasserdrücke überall senkrecht zur Kurve stehen.

Meine Arbeit enthält auch ein Beispiel für die Anwendung der dort entwickelten Theorie und Bemerkungen über ihre Verwendung im Behälterbaue.

Graz. Karl Federhofer. 876

[1]) In der Abb. steht irrtümlich „$b_{Bum\,A}$" statt „$b_{Aum\,B}$".

[2]) ZAMM Bd. 13, 1933, S. 243.

[3]) Ingenieur-Archiv 3, 1932, S, 507 bis 515.

[4]) Alt: ZAMM 1929, S. 424.

[5]) Federhofer: Graphische Kinematik und Kinetostatik, Berlin J. Springer 1932, S. 4.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.



A. Bezugsbedingungen:

Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.)

Die Bezugszeit ist halbjährig (Ausland ganzjährig).

Der Bezugspreis beträgt $^1/_2$jährlich **15.— RM.**; ganzjährig **30.— RM.**
für Mitglieder „ **13.50 RM.**; „ **27.— RM.**

Bestellung kann bei jeder Buchhandlung oder beim Verlag aufgegeben werden.

Abbestellung ist nur am Schluß eines Halbjahres bezw. Jahres zulässig. Nicht befristete Bestellungen laufen von Halbjahr zu Halbjahr weiter (Ausland von Jahr zu Jahr).

Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben der Zahlung durch Nachnahme eingezogen.

Lieferung unter Streifband.

Einzelheftpreis: 6.— RM., für Mitglieder 5.40 RM. zuzüglich 15 Rpf. Postgeld.

VDI-Literaturkartei: Auf Wunsch erhalten unsere Bezieher unberechnet Karteikarten über den Inhalt sämtlicher Zeitschriften des VDI in monatlichen Zusammenstellungen gegen Erstattung der jährlichen Versandkosten von 1.— RM.

ZUR BEACHTUNG

Lieferstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind zweckmäßig stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Zuschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise

Satzspiegel der $^1/_1$ Seite 171/250 mm.
$^1/_1$ Seite 160.— RM, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ Seite anteilig.

Nachlaß: bei 3maliger Aufnahme im Jahr 3 vH, bei 6maliger Aufnahme im Jahr 5 vH.

Aufschläge für Vorzugsplätze nach vorheriger Vereinbarung laut Tarif. Erfüllungsort für beide Teile Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernsprecher: Sammel-Nr. 116171. Postscheckkonto: Berlin 102373, Wien 174439, Prag 77329, Budapest 59951, Warschau 194372. Bankverbindungen: Dresdner Bank, Depositen-Kasse 65, Berlin C 2, Wallstr. 5 bis 8. — Deutsche Bank, Stadtzentrale Abt. A, Berlin W 8, Mauerstraße 26/27. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 7[45] bis 16[30] Uhr, Sonnabend 7[45] bis 12[30] Uhr.